'मास्टर' ग्रन्थमालायाः १२६ संख्याको मणिः

॥ श्रीः ॥

गणित-मुक्तावली

द्वितीयो भागः ।

मध्यमपरीक्षाप्रथमखण्डनिर्द्धारितगणितसंग्रहरूपः

रचयिता—
पं० श्रीविशुद्धानन्दशर्मा गौडः

प्रकाशकः—
मास्टर खेलाड़ीलाल एण्ड सन्स

मूल्यं षडाणकाः ।

मास्टरमणिमालायाः १२६ संख्यको मणिः (ज्यौ० वि० २८)

* श्रीः *

मध्यमापरीक्षाप्रथमखण्डनिर्द्धारितगणितसंग्रहरूपः

गणित-मुक्तावली-

द्वितीयो भागः ।

खुर्जास्थश्रीराधाकृष्णसंस्कृतमहाविद्यालयज्यौतिषशास्त्रा-
ध्यापकेन पं० श्रीविशुद्धानन्दगौडेन
ज्यौतिषाचार्येण विरचितः ।

ज्यौ० आ० पं० श्रीसीताराममझाशर्म्मसंशोधितः

स च-

'काशीस्थ-संस्कृत-बुकडिपो' इत्यस्याधिपैः

मास्टर खेलाड़ीलाल ऐण्ड सन्स इत्येतैः

"मास्टर-प्रिण्टिङ्ग-वर्क्स" नाम्नि मुद्रायन्त्रे

मुद्रापयित्वा प्रकाशितः ।

सन् १९३९ ई०

मूल्यम् ।≈)

T

प्रकाशक—
जे० एन० यादव प्रोप्राइटर
मास्टर खेलाड़ीलाल ऐण्ड सन्स
संस्कृत बुकडिपो,
कचौड़ीगली, बनारस सिटी ।

शाखा—
मास्टर खेलाड़ीलाल ऐण्ड सन्स
संस्कृत बुकडिपो,
मुरादपुर, बाँकीपुर,
पटना ।

सम्वत् १९९६

मुद्रक—
श्रीमन्नालाल 'अभिमन्यु' एम० ए०,
मास्टर प्रिंटिङ्ग वर्क्स,
बुलानाला, काशी ।

T

T

CC-0. Mumukshu Bhawan Varanasi Collection. Digitized by eGangotri

समर्पण

प्रातःस्मरणीय, पूज्यचरण, आचार्य-प्रवर, विज्ञानराशी, श्रीराधाकृष्णसंस्कृतमहाविद्यालय, खुर्जा के प्रिंसिपल महोदय, श्री १०८ परम माननीय श्रीपंडित परमानन्दजी, शास्त्री. विद्यावाचस्पति जी के पवित्र चरण-कमल-युगल में अत्यन्त श्रद्धा के साथ समर्पित-

श्रीगुरुदेव !

यह कुछ नहीं है, किन्तु आपके ही पवित्र चरणों में बैठकर जो कुछ भी आजतक सीखा है, वह आपही की वस्तु बड़े चाव से "श्रीचरणों में" समर्पित करते हुए मुझे आज असीम प्रसन्नता हो रही है। मुझे पूर्ण विश्वास है कि आज अकिञ्चन-मुक्तावली को अपने चरणों में स्थान-प्रदान करके अपने बालक-शिष्य का उत्साह बढ़ायेंगे और भविष्य में भी कुछ अन्यान्य सेवाओं के लिये शुभाशीर्वाद देकर कृतार्थ करेंगे।

चरण-चञ्चरीक—

विशुद्धानन्द गौड़।

T

* प्राक्कथन *

"गणित मुक्तावली" का प्रथम भाग 'प्रथमा' एवं तत्सम परीक्षाओं के लिये लिखा जा चुका है। यह द्वितीय भाग गवर्नमेण्ट संस्कृत कालेज परीक्षा, बनारस के प्रत्येक विषय की 'मध्यमा' परीक्षा के प्रथम खण्ड के लिखा गया है।

उक्त परीक्षा-समिति ने इसी वर्ष इस नवीन विषय का सन्निवेश 'मध्यमा' में किया है, यह निःसन्देह अत्यन्त उपादेय अथ च अत्यावश्यक विषय है, इस का अभाव चिरकाल से सहृदय हृदय में काँटे की भाँति खटक रहा था। इस के सन्निवेश से उक्त समिति के सदस्यों ने सुदूरदर्शिता का परिचय प्रदान करके संस्कृत-छात्रों का अनुपम उपकार किया है. एतदर्थ वे धन्यवाद के योग्य-पात्र हैं।

प्रस्तुत पुस्तक का यह द्वितीय भाग श्री राधाकृष्ण संस्कृत-महाविद्यालय, खुर्जा के लब्धप्रतिष्ठित अध्यापक—श्री पण्डित विशुद्धानन्द जी ज्यौतिषाचार्य ने लिखा है। जहाँ तक मैंने इस पुस्तक को देखा है, मैं कह सकता हूँ कि लेखकने अत्यल्प समय में बहुत परिश्रम किया है। छात्रों के समझने योग्य अत्यन्त सरल भाषा में प्रायः परीक्षा निर्धारित निखिल विषय समझाने का प्रयत्न किया है।

इस पुस्तक की कुछ विशेषताएँ:—

(क) महत्तम, लघुत्तम, भिन्न एवं त्रैराशिक की परिभाषाएँ अत्यन्त सरल रीति से समझाई गई हैं। प्रत्येक विषय के उदाहरण प्रचुर परिमाण में लिखे गये हैं। तथा इन का विधान-मार्ग भी सरल किया है।

(ख) भिन्न राशियों के संकलन, व्यवकलन, गुणन और भजन

T

को गणित की नवीन-प्रचलित शैली के अनुसार क्रिया के द्वारा सरलता से लिखा गया है ।

(ग) त्रैराशिक के भेद एवं लक्षण, उदाहरण, कोष्ठगत भिन्न को खोलना, बड़ी भिन्न को संक्षिप्त-रूपेण विशद करना, व्यस्तत्रैराशिक तथा साधारण त्रैराशिक के भेदों को सोदाहरण प्रदर्शित करना, कार्यसम्बन्धि प्रश्न, वापी-तडागादि में जल-प्रपूरण एवं निस्सारणादि प्रक्रिया का निरूपण, व्याज सम्बन्धि प्रश्नोत्तरों का प्रदर्शन आदि इस में प्रायः सभी ठीक तरह से समझाया गया है ।

मेरे विचार से इस पुस्तक को और भी उत्तम बनाया जा सकता था, किन्तु अत्यल्प समय में ज्यौतिषाचार्य जी ने जो कुछ भी किया है, विज्ञजन उसको अपनाकर लेखक के उत्साह की श्रीवृद्धि करेंगे । और हम चाहते हैं, भगवान् आपको और भी अधिक बल दें, जिससे आप अधिक सेवा करके सुर-भारती का प्रसाद ग्रहण करें ।

पुस्तक के विषय में मुझे कुछ विशेष लिखना अनावश्यक-सा प्रतीत होता है, बस, केवल इतना कहना ही पर्याप्त होगाः—

"तं सन्तः श्रोतुमर्हन्ति, सदसद्व्यक्तिहेतवः ।"

(कालिदासः)

ब्रह्मानन्दशुक्लगौड,

ता० ११-८-३९ ई०

व्याकरणालङ्कारशास्त्री,
काव्यतीर्थ, साहित्याचार्य, कविरत्न,
साहित्यविभागाध्यक्ष—
श्रीराधाकृष्ण संस्कृत कालेज,
खुरजा सिटी ।

T

लेखक की ओर से निवेदन।

गणित मुक्तावली का यह द्वितीय भाग काशीस्थ-मध्यमा-परीक्षा के प्रथमखण्ड के छात्रों के लिये लिखा गया है। इस में भिन्न और त्रैराशिक का स्पष्टीकरण किया गया है। इस का प्रथम भाग प्रथमा कक्षा के छात्रों के लिये लिखा जा चुका है। इस के आगे का गणित का विषय भी इसके तृतीय भाग में इसी क्रम से प्रकाशित किया जायगा। इस पुस्तक को प्रकाशित करने का श्रेय काशी के सुप्रसिद्ध मास्टर खेलाड़ीलाल ऐण्ड सन्स, संस्कृत बुकडिपो के अध्यक्ष, बाबू श्रीजगन्नाथ प्रसाद जी यादव को है जिन्हों ने इस पुस्तक के इस द्वितीय भाग को सर्वाङ्ग सुन्दर बनाने का पूरा यत्न किया। इस लिये उक्त अध्यक्ष महोदय को हृदय से धन्यवाद देते हुए मैं अपने उन हितैषी तथा पूज्य अध्यापकवर्गों के प्रति कृतज्ञता प्रकाशित करता हूँ जिन्होंने मुझे इस विषय में सम्मति तथा सहानुभूति प्रदानकर अनुगृहीत किया है। मैं अपने उन प्रिय छात्रों का भी सर्वथा आभारी हूँ जिन्होंने इन भागों के लिखने में मुझे कुछ भी सहायता प्रदान की है।

मनुष्य के स्वाभाविक दोष, दृष्टिदोष वश तथा यन्त्रालय के दोष से जो कुछ त्रुटि रह गई हो उसे सुधार कर विद्वत्समाज तथा विद्यार्थीवन्धु इस से लाभ उठायेंगे तो मैं अपना प्रयत्न सफल समझूंगा।

अधिकश्रावण कृ० ११ \
सं० १९९६

निवेदकः—
श्रीविशुद्धानन्दशर्मा गौड़,
ज्यौतिषाचार्य।

T

सम्मतयः

गणित मुक्तावली का यह द्वितीय भाग, मध्यमा परीक्षा प्रथम खण्ड के गणित के पत्र के लिये, पं० विशुद्धानन्द शर्मा गौड़ ज्यौतिषाचार्य जी ने, बालकों की हितदृष्टि से बनाया है। इसमें भिन्न और त्रैराशिक के विषय को संस्कृत के गणित के आधार पर नवीन गणित के स्वरूप में परिणत करके उदाहरणों द्वारा समझाया हैं। इससे यह पुस्तक बालकों के गणित के चतुर्थपत्र के लिये सर्वथा उपयुक्त है। संस्कृत के भिन्न और त्रैराशिक के पारिभाषिक शब्दों को सरल हिन्दी भाषा में समझा कर लिखा है। इसलिये हमारी सम्मति से यह पुस्तक उक्त परीक्षार्थियों के लिये सर्वथा उपयोगी है।

हृषीकेशोपाध्याय,
भूतपूर्व प्रधानाध्यापक गवर्नमेन्ट संस्कृत कालेज, बनारस।

पं० श्रीगेनालालचौधरी,
टीकमाणी सं० कालेज ज्यौतिषशास्त्राध्यापक।

पं० श्रीदाऊ जी दीक्षित,
नीची ब्रह्मपुरी, काशी।

पं० श्रीरामानन्द जी ज्यौतिषाचार्य,
ज्यौतिषशास्त्राध्यापक हिन्दू कालेज, काशी।

पं० श्रीमातृदेव जी शुक्ल व्याकरणाचार्य, आयुर्वेदोपाध्याय,
अध्यापक श्रीराधाकृष्ण सं० कालेज, खुर्जा।

पं० श्रीईश्वरीदत्त जी शास्त्री, व्याकरणाचार्य,
अध्यापक, राधाकृष्ण सं० कालेज खुर्जा।

श्रीराधाकृष्ण संस्कृत महाविद्यालय, खुर्जा
के
प्रिन्सिपल महोदय की सम्मतिः—

श्रीराधाकृष्णसंस्कृतमहाविद्यालय-खुर्जास्थ—ज्यौतिषशास्त्राध्यापक-प्रवरेण आयुष्मता श्रीविशुद्धानन्दशर्म्मणा गौडेन ज्यौतिषाचार्येण सुसमलंकृतामिमां 'गणितमुक्तावलीं' मवलोक्य प्रसीदति नश्चेतः। इयं हि निर्विकल्पं छात्राणां कण्ठे निहिता सती महान्तमुपकारं करिष्यति।

इति विज्ञापयति—

विद्यावाचस्पतिः

श्रीपरमानन्दशर्म्मा शास्त्री ।

[अस्मिन् विषये विदुषामेषामपि सन्ति सम्मतयः]

पं० कुबेरदत्तजी शास्त्री व्याकरणाचार्य

द्वितीयाध्यापक, श्रीराधाकृष्ण सं० महाविद्यालय, खुर्जा ।

पं० मुंशीलालजी शर्मा, बी-कॉम०, इंग्लिशविभागाध्यक्ष-राधाकृष्ण सं० कालेज, खुर्जा ।

मास्टर भारतसिंहजी शर्मा पाठक, मेरठ ।

मास्टर रामेश्वरदयाल जी शर्मा एफ० ए०, सी० टी० ।

T

* श्रीः *

गणित-मुक्तावली

द्वितीयो भागः ।

विपन्नाशकं तोषकं सज्जनानां-
सुखं दर्शयन्तं सुधामज्जनानाम् ।
सदा दुःखसन्दोहदोलायमाना-
जना यं भजन्ते भजे तं गणेशम् ॥१॥

बालानां गणनाप्रबोधमखिलं सम्बर्द्धयन्ती सदा
नित्यं ज्यौतिषसेविनां सुमनसामुल्लासयन्ती मुदम् ।
मूढोऽपि व्यवहारपाटवमियादज्ञोऽपि योग्यो यया
नव्या भातु समुज्ज्वलाऽत्र गणिते मुक्तावलीयं शुभा ॥२॥

लघुत्तम समापवर्तक की परिभाषा—

(१) छोटी से छोटी संख्या जो दो या अधिक संख्याओं से पूरी पूरी बँट जाय वे संख्याएँ लघुत्तम समापवर्त्य कहलाती हैं।

यथा ८, १०, १२, इन संख्याओंका लघुत्तम समापवर्त्य १२० है।

महत्तमसमापवर्तक परिभाषा—

(१) बड़ी से बड़ी संख्या जो दो या अधिक संख्याओं को पूरी पूरी बाँट दे वे संख्याएँ महत्तम समापवर्तक कहलाती हैं।

जैसे १२, १६ का महत्तम समापवर्तक ४ है।

T

भिन्न परिभाषा—

इकाई के एक अथवा अधिक समानांशों से बनी हुई राशि को 'भिन्न' कहते हैं।

कोई राशि जो पूरी इकाइयों से बनी हुई होती है तो वह 'पूर्ण संख्या' कहलाती है।

पूर्णाङ्क संख्या जब अंशों में विभक्त की जाती है तो वह भिन्न रूपमें परिणत होकर 'भिन्न' कहलाती है।

इकाई जितने भागों में विभक्त की जाय उसे 'हर' कहते हैं। और उसमें जितने भाग ग्रहण किये जाँय वे 'अंश' कहलाते हैं।

जैसे इकाई एक को पाँच ५ ही बराबर हिस्सों में बाँटा गया और इन पाँच हिस्सों में ३ हिस्से ग्रहण कर लिये जाँय, तो उक्त पांच हिस्से 'हर' कहलावेंगे। ३ हिस्से जो ग्रहण कर लिये गये हैं, वे 'अंश' कहलाते हैं। इस लिये यहाँ इकाई भिन्न रूपमें परिणत होकर तीन बटे पांच = $\frac{3}{5}$ कहलावेगी तथा बोली जावेगी।

यहाँ $\frac{3}{5}$ में — इस आड़ी लकीर के ऊपर की संख्या 'अंश' तथा नीचे की संख्या 'हर' कहलाती है। प्राचीन ग्रन्थों में इसका संकेत $\frac{3}{5}$ यही मिलता है, कि प्राचीन लोग अंश के नीचे हर लिख देते थे, आधुनिक काल में — आड़ी लकीर बीच में रख कर ऊपर के मानको अंश, नीचे के मान को हर कल्पना करके लिखा जाता है। इससे यह बात स्पष्ट प्रतीत हो जाती है कि इकाई कुछ समान भागों में विभक्त की गई है उसमें इतने भाग लिये गये हैं।

इस लिये ऐसी राशि को भिन्न राशि कहते हैं।

$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$, इत्यादि

T

ये भिन्न के संकेत हैं, $\frac{1}{2}$=आधा, $\frac{1}{3}$ = एक तिहाई, $\frac{1}{4}$=एक चौथाई, $\frac{2}{3}$ = दो तिहाई:—

इस प्रकार भिन्न की बड़ी छोटी हर एक संख्याएँ बनती हैं। भिन्न चार प्रकार का होता है।

(१) भाग जाति भिन्न (२) प्रभाग जाति भिन्न

(३) भागानुबन्ध भिन्न (४) भागापवाह भिन्न

(१) भाग जाति भिन्न उसे कहते हैं जिसमें एक भिन्न एक भाग दिखावे।

जैसे $\frac{2}{3}$ अथवा $\frac{3}{4}$ वा $\frac{1}{3}$ इत्यादि।

(२) प्रभाग जाति भिन्न वह भिन्न है, जो अपने हिस्से के भी हिस्सों में विभक्त हो।

जैसे $\frac{1}{2}$ का $\frac{2}{3}$ का $\frac{3}{4}$। यहां $\frac{1}{2}$ एक बटादो यह भिन्न पहिले $\frac{2}{3}$ हिस्से में पुनः $\frac{3}{4}$ हिस्सों में भी बटी। अतः ऐसी भिन्न को प्रभाग जाति भिन्न कहते हैं।

इस लिये भिन्न के भिन्न को प्रभाग जाति भिन्न कहते हैं।

भागानुबन्ध भिन्न तथा भागापवाह भिन्न की परिभाषा—

छेदघ्नरूपेषु लवाधनर्णमेकस्य भागा अधिकोनकाश्चेत्।
स्वांशाधिकोनः खलुः यत्र तत्र भागानुबन्धे च लवापवाहे॥

—लीलावती।

(३) भागानुबन्ध भिन्न वह भिन्न है जिसमें पूरी संख्या किसी अन्य भिन्न राशि से मिश्रित हो।

जैसे २$\frac{2}{3}$ यहां २ यह पूर्ण संख्या $\frac{2}{3}$ इस भिन्न संख्या में धन है।

(४) भागापवाह भिन्न वह भिन्न है। जिसमें पूर्ण संख्या में कोई अन्य भिन्न संख्या ऋण गत हो। अर्थात् घटाई जाय; जैसे

T

$३ - \frac{१}{४}$ यहां ३ इस पूर्ण संख्या में $\frac{१}{४}$ यह भिन्नराशि ऋण है। ऐसे भिन्न की स्थिति को भागापवाह भिन्न कहते हैं।

भागानुबन्ध तथा भागापवाह भिन्न को सवर्णित करने के लिये उक्त लीलावती के प्रमाणानुसार यदि किसी भिन्न में पूर्णाङ्क हो और उसमें एक का कोई अंश जोड़ा या घटाया गया हो तो पूर्णाङ्क को हर से गुणन करो और अंश यदि धन हो तो घटा दो। फल को अंश के स्थान पर रखो और हर को वहीं रहने दो तो वह सामान्य भिन्न हो जावेगी।

त्रैराशिक परिभाषा—

तीन दी हुई राशियों की चौथी समानुपात की राशि निकाल कर प्रश्नों के साधन करने की रीति को त्रैराशिक कहते हैं। प्रत्येक त्रैराशिक प्रमाण, इच्छा, तथा फल इन तीन भेदों से सम्बन्ध रखती है।

रीति—

प्रमाणमिच्छा च समानजाती आद्यन्तयोस्तत्फलमन्यजातिः।
मध्ये तदिच्छा हतमाद्यहृत्स्यादिच्छाफलं व्यस्तविधिर्विलोपे ॥१॥

लीलावती।

अर्थात् त्रैराशिक दो प्रकार का होता है (१) साधारण त्रैराशिक (२) व्यस्तत्रैराशिक।

प्रमाण और इच्छा समान जाति होती है। इसको आदि और अन्त में स्थापन करे और अन्य जाति को मध्य में स्थापन करै, फल अन्य जाति के समान होगा। उस अन्य जाति को इच्छा से गुणा करै, आदि अर्थात् प्रमाण से भाग दे तो इच्छा सम्बन्धि फल प्राप्त होगा।

विलोम त्रैराशिक में व्यस्त विधि करनी चाहिये।

उदाहरण—

यदि १० मन अन्नके दाम६०)रू० हैं तो ३० मन अन्नके दाम क्या होंगे?

T

यह साधारण त्रैराशिक का प्रश्न है, इसमें १० मन की प्रमाण संज्ञा तथा आदि संज्ञा है क्योंकि यह आरम्भ ही दिया गया है ६०) यह प्रमाण सम्बन्धि फल है। ३० मन इसकी इच्छा संज्ञा है प्रमाण को आदि में, इच्छा को अन्त में स्थापित करना चाहिये। ये दोनों एक जातीय होते हैं। फल अन्य जाति होता है, इसको मध्य में रखना चाहिये। फिर उसके द्वारा इच्छा सम्बन्धि फल का ज्ञान करना चाहिये।

इसका न्यास इस प्रकार है—

∵ यदि १० मन अन्न का मूल्य = ६०) रु० है।

∵ तो ३० मन अन्न का मूल्य = इच्छा सम्बन्धि फल आवेगा।

$$१० \text{ मन} : ३० \text{ मन} :: ६० : \text{उत्तर} = \frac{३० \times ६०}{१०} = १८०$$

इसलिये प्रमाण सम्बन्धि फलको इच्छा से गुणा किया। आद्य अर्थात् प्रमाण से भाग दिया तो इच्छा सम्बन्धि फल हुवा।

$$= \frac{३० = \text{इच्छा} \times ६० = \text{प्र० सं० फ०}}{१० = \text{प्रमाण}} = १८० \text{ फल हुआ।}$$

$$= \frac{३० \times \overset{६}{\cancel{६०}}}{\cancel{१०}} = १८०$$

नोट—ऐसी परिस्थिति में प्रमाण से इच्छा जितने गुना बढ़ेगी उतने गुना ही प्रमाण सम्बन्धि फल से इच्छा सम्बन्धि फल भी बढ़ेगा।

यह प्राचीन क्रम है।

नवीन क्रम में एक मन का मूल्य प्रहिले जानना होता है तब अधिक का प्रमाण जाना जाता है। इस को इकाई का कायदा बोलते हैं।

जैसे—∵ १० मन अन्न का दाम=६०) रु०

∴ १ मन अन्न का दाम=$\frac{६०}{१०}$=६) रु०

∴ ३० मन का दाम=३० × ६=१८०) रु०

उत्तर =१८०) रु० हुआ।

T

इसमें यदि उत्तर न्यून अर्थात् कम आता है तो अधिक संख्या का भाग लगता है। और उत्तर अधिक आता है तो कम संख्या का भाग लगता है। इस नियम का ऐसी जगह पूरा ध्यान रखना चाहिये। बीच में १ मन का दाम जानने से इच्छा सम्बन्धि फल की वास्तविक स्थिति का पता चलता है, कि इच्छा सम्बन्धि फल घट रहा है, या बढ़ रहा है फिर वास्तविक उत्तर ठीक आ जाता है।

इस त्रैराशिक को साधारण त्रैराशिक कहते हैं।

व्यस्त त्रैराशिक परिभाषा—

इच्छावृद्धौ फले ह्रासो ह्रासे वृद्धिः फलस्य तु।
व्यस्तं त्रैराशिकं तत्र ज्ञेयं गणितकोविदैः ॥ लीलावती

अर्थात् जिस स्थल में इच्छा की वृद्धि से फल कम होता है, तथा इच्छा कम होने से फल बढ़ता है वहां व्यस्त त्रैराशिक होता है।

जीवानां वयसो मूल्ये तौल्ये वर्णस्य हेमनि।
भागहारे च राशीनां व्यस्तं त्रैराशिकं भवेत् ॥ २ ॥

अर्थात् जीवों की अवस्था पर, और स्वर्ण की वर्ण संख्या पर, तौल पर मूल्य निर्भर रहता है ऐसे ही राशियों के भाग हार में अर्थात् अन्न के ढेर को तोलने में व्यस्त त्रैराशिक प्रवृत्त होती है।

उदाहरण—यदि १६ वर्ष की दासी का मूल्य ३२ रुपया है तो बताओ २० वर्ष की दासी क्या मूल्य होगा ?

यहां प्रमाण १६, फल ३२ और इच्छा २० है। २० वर्ष वाली दासी की अपेक्षा १६ वर्ष वाली दासी अधिक मूल्य पर मिलेगी। अतएव यहां इच्छा के बढ़ने से फल घटेगा। इस लिये विलोम त्रैराशिक होने से प्रमाण को फल से गुणा करके, इच्छा से भाग देना होगा।

∴ (१६ × ३२) ÷ २०

T

$$= \frac{\cancel{१६}^{४} \times ३२}{\cancel{२०}_{५}}$$

$$= \frac{१२८}{५}$$

$= २५\frac{३}{५}$ रुपये ।

यहां यही इच्छा सम्बन्धि फल रहेगा । इस त्रैराशिक को व्यस्त त्रैराशिक कहते हैं ।

त्रैराशिक का प्रयोग

कार्य सम्बन्धि, ब्याज सम्बन्धि तथा व्यवहार सम्बन्धि प्रायः हर एक व्यवहार में त्रैराशिक की आवश्यकता होती है । पञ्चराशिक, सप्तराशिक, नवराशिक का व्यवहार प्रश्न की आकांक्षा के अनुसार वढ़ जाता है ।

अर्थात् यदि छोटा प्रश्न है तो त्रैराशिक जिसमें तीन बातों को जान कर चौथे का ज्ञान करना होता है । चार राशि के ज्ञान से पाँचवीं वस्तु के ज्ञान को तथा छठी वस्तु के ज्ञान को पञ्चराशिक कहते हैं । इसी प्रकार सप्तराशिक, नवराशिक आदि भी उत्तरोत्तर आवश्यकतानुसार व्यवहृत होती हैं । परन्तु इन सभों के प्रति त्रैराशिक की ही उपादेयता है । बीजगणित, तथा पाटीगणित इन दोनों गणितों में त्रैराशिक ही प्रधान गणित का विषय माना जाता है ।

भास्कराचार्य्य ने अपनी पाटीगणित में स्पष्ट लिखा है:—

यत्किञ्चिद्गुणभागहारविधिना बीजेऽत्र वा गण्यते
तत्त्रैराशिकमेव निर्मलधियामेवागम्यं विदाम् ।
एतद्यद्बहुधाऽस्मदादिजडधी धीवृद्धिबुद्ध्या बुधै-
स्तद्भेदान् सुगमान् विधाय रचितं प्राज्ञैः प्रकीर्णादिकम् ॥१॥

T

CC-0. Mumukshu Bhawan Varanasi Collection. Digitized by eGangotri

इस प्रमाण से यह स्पष्ट है कि पञ्चराशिक, सप्तराशिक आदि सब त्रैराशिक कल्पना से ही सिद्ध होती है। समस्त गणित विषय में त्रैराशिक ही प्रधान है। इसका सविस्तार उदाहरण सहित प्रयोग क्रमशः भिन्न गणित के बाद में न्यास किया है।

यहाँ भिन्न तथा त्रैराशिक की परिभाषा ही पहिले दी जाती है।

उत्पादक और रूढ़ संख्याएँ

(१) यदि एक संख्या दूसरी से पूरी बँट जाय तो दूसरी संख्या को पहिली संख्या का "अपवर्तक" वा "उत्पादक" वा "गुणनीयक" वा "गुणनखण्ड" कहते हैं। और पहिली संख्या को दूसरी का "अपवर्त्य" वा "आधार" कहते हैं। जैसे १५ का उत्पादक ५ है और ५ का अपवर्त्य १५ है।

Even number odd

(२) सम संख्या उस संख्या को कहते हैं जो दो से पूरी बँट जाय—और विषम संख्या उस संख्या को कहते हैं जो दो से पूरी न बँटे।

(क) पूरी बँटने की पहिचान—

कोई भी संख्या २ से पूरी उस हालत में बँट सकती है जब उस संख्या के अन्त का अंक शून्य हो वा कोई अंक सम हो जैसे २१०, ५४

४ से उस हालत में बँट सकती है जब उस संख्या के अन्तके दो अङ्क ऐसी संख्या प्रगट करते हो जो ४ से पूरी बँट सके—जैसे ३००, ३२०, ३२४

८ से भी उस हालत में बँट सकती है जब उस संख्या के अन्त के तीन अंक ऐसी संख्या को प्रकट करते हों जो ८ से पूरी बँट सके।

जैसे २०००, ३४००, ३२४०, ३८१६

५ से तब बँट सकती है जब उस संख्या के अन्त में शून्य हो अथवा ५ हो। जैसे ३७०, ३४५।

१० से तब बँटेगी जब उसके अन्तका अंक शून्य हो।

३ से उस हालत में बँट सकती है जब उक्त संख्या के सब अंकों का योग फल ३ से पूरा २ बंट जाय। जैसे १२६, ४०२।

९ से कोई संख्या उस हालत में पूरी बँट सकती है जब उसके सब अंकों का योग फल ९ से पूरा बँट जाय जैसे ४७७, ८०१।

११ से उस हालत में बँट सकती है जब उस संख्या के सम और विषम स्थानों के अंकों के योग फलों का अन्तर शून्य हो वा ११ से पूरा बँट जाय जैसे ५८२९३४। ३४६७२

(ख) कोई संख्या ७, ११, १३ से पूरी बँट सकती है या नहीं इसके ज्ञान के लिए निम्नलिखित नियम हैं।

संख्या के अंकों को दाहिनी ओर से बाईं ओर को गिनकर तीन ३ अंकों के टुकड़ों में विभाग करना चाहिये।

सम और विषम टुकड़ों को अलग २ जोडकर अधिक में से न्यून को घटाकर देखे यदि शेष शून्य रहे वा ७, ११, १३ से पूरा बँट जाय तो वह संख्या भी ७, ११, १३ से पूरी बँट जायगी। जैसे ८९१२६ यह संख्या ७ से बंट सकती है। क्योंकि विषम स्थान के अंकों का और सम स्थान के अंकों का योगान्तर सात ही है तीन टुकड़ों में १२६—९८=२८ यह भी ७ से पूरी कट जाती है। परन्तु ११, १३ से नहीं।

(ग) यदि कोई संख्या दो संख्याओं में से जिनका कोई समापवर्तक नहीं है, अलग २ पूरी २ बँट जाय तो वह उनके गुणनफल से भी पूरी २ बँट सकती है।

जैसे ८० यह संख्या ५ संख्या तथा ४ संख्या इन दो संख्याओं में से प्रत्येक से अलग २ पूरी २ बँट जाती है तथा ८० उपरोक्त दोनों संख्याओं का समापवर्तक भी नहीं है। इसलिये

T

८० संख्या ५ तथा ४ के गुणनफल २० से भी पूरी २ बँट जायेगी। इसी प्रकार अन्यत्र भी जानना।

(घ) यदि कोई संख्या ३ वा ९ से पूरी बँट जावे तो कोई और संख्या जो उन्हीं अङ्कों से जाहिर की जाय तो वह ३ वा ९ से पूरी बँट सकती है।

जैसे १८ संख्या ३ तथा ९ से पूरी बँट जाती है तो १८ संख्या के १, ८ अङ्क से बनी हुई संख्या ८१ भी ३ तथा ९ से पूरी बँट जायेगी।

(च) यदि दो संख्याओं में से प्रत्येक किसी तीसरी संख्या से पूरी बँट जाय तो उनका योग फल और अन्तर भी उस तीसरी संख्या से पूरा बँट सकता है।

जैसे ३६ तथा ४८ ये दो संख्याएँ तीसरी संख्या १२ से पूरी बट जाती हैं तो ३६+४८=८४ यह योगफल तथा ४८−३६ =१२ यह अन्तर भी तीसरी संख्या १२ से पूरा बँट जावेगा।

(छ) यदि एक संख्या दूसरी से पूरी बँट जाय तो प्रथम संख्या का कोई गुणितक भी उस दूसरी संख्या से पूरा बँट सकता है।
जैसे—६४ संख्या १६ से पूरा बँट जायेगा। इस प्रकार सब गुणितकों में जानना चाहिये।

(ब) यदि दो संख्याओं में से प्रत्येक, किसी तीसरी संख्या से पूरी बँट जाय तो प्रथम संख्या के किसी गुणितक और दूसरी संख्या के किसी गुणितक का योगफल और अन्तर भी उस तीसरी संख्या से पूरा बँट सकता है।
जैसे ७२, ६४ इन दो संख्याओं में से प्रत्येक, तीसरी ८ संख्या से पूरी बँट जाती है तो प्रथम संख्या का गुणितक कोई भी जैसे २१६ यह तथा ६४ का गुणितक १२८ इन दोनों का योग तथा अन्तर क्रम से ३४४, ८८ यह दोनों भी ८ से पूरे बँटेंगे।
T

उदाहरणमाला (१)

(१) ६८४, ८८४४, १२३०, ७:२८

ये संख्याएँ ३, ५, ९, ११ से पूरी बँट सकती है या नहीं ?

(२) निम्न संख्याएँ ११, १३ से बँट सकेगी या नहीं ?

८९१३३, ६७११९, ४३३३५८

(३) ३९१२०, ८९१३३, ६७११९

ये संख्याएँ ७, ११, १३ से पूरी बँट सकती है या नहीं ?

(४) ३७२, ९४८, ७७४०, ३७२५

ये ६, १२, ३० से पूरी बँट सकती है या नहीं ?

महत्तमसमापवर्त्तक

(१) जिन संख्याओं का महत्तम समापवर्तक निकालना हो पहिले उनके ऐसे गुणनखण्ड करो जो पूर्णाङ्क संख्या से पूरे २ न कट सकें ऐसे गुणनखण्डों को रुढ़ि गुणनखण्ड कहते हैं। फिर अलग २ स्थापित करो फिर जो २ संख्यायें उन सब से सम्मिलित हों उनको अलग लिखो और उनका परस्पर गुणन करो। गुणनफल ही उन सब संख्याओं का महत्तमसमापवर्तक होगा।

(२) बड़ी संख्या को छोटी संख्या से भाग दो, जो शेष रहे उसको भाजक मानो और पहिले भाजक को भाज्य मानकर, भाग देने से जो शेष बचे उसको फिर भाजक मानो और पहिले वाला शेष जिस को अभी भाजक मान चुके हैं भाज्य मान कर भाग दो, इसी तरह करने से अन्त का भाजक महत्तम समापवर्तक होता है। उसमें यदि दो से अधिक संख्याओं कामहत्तम समापवर्तकनिकालना होवे, तो पहले दो का निकालो। फिर इस महत्तम तथा तीसरी संख्या का निकालना चाहिये फिर इस महत्तम और चौथी संख्या का। इस प्रकार आगे भी।

T

जैसे उदाहरण—

(१) ७५, ३७५, ६२५ का महत्तम समापवर्तक निकालना है
पहला प्रकार।

७५ गुणनखण्ड=३ × ५ × ५
३७५ ,, =३ × ५ × ५ × ५
६२५ ,, =५ × ५ × ५ × ५

यहां स्पष्ट है कि ५ प्रत्येक संख्या में शामिल, इसके बाद फिर विचारा कि दूसरा ५ भी फिर शामिल है। अब ज्ञात करो कि और कौन अङ्क है जो सब संख्याओं में शामिल हो। देखा तो अब कोई नहीं है। इसलिये ५ × ५ = २५ महत्तमाङ्क हुवा।

इससे सिद्ध हुआ कि जिस बड़ी संख्या से निर्धारित संख्याओं में जिनका कि महत्तम समापवर्त्य निकालना है अपवर्तन लग सके वही संख्या महत्तम समापवर्त्य की संख्या होती है।

(२) द्वितीय नियम के अनुसार—

पहिले ७५, और ३७५ का महत्तम निकालना। बड़ी संख्या में छोटी से भाग दिया—कुछ शेष न रहा इस लिये ७५ ही महत्तम निकला—

७५) ३७५ (५
 ३७५
 ×

अब महत्तम ७५ और तीसरी राशि ६२५ का महत्तम समापवर्त्य निकाला—इस लिये बड़ी संख्या में छोटी संख्या का भाग दिया। छोटी संख्या को भाजक माना। बडी संख्या को भाज्य माना। फिर भाग दिया। फिर शेष २५ को नया भाजक माना। ७५ को नया भाज्य माना पूरा २ कट गया। इस लिये २५ महत्तमापवर्त्य हुआ। इस प्रकार परस्पर भाग देने अन्तिम भाजक जिससे

७५) ६२५ (८
 ६००
२५) ७५ (३
 ७५
 ×

T

कि अन्तिम भाज्य शुद्ध हो जाय वह अन्तिम भाजक ही सब संख्याओं का महत्तम समापवर्त्य होता है।

(२) ५०४, २३९४, २८३५ इन संख्याओं का महत्तमसमापवर्त्य निकालो।

यहां पर पहिले छोटी संख्या से भाग दिया—

५०४) २३९४ (४
२०१६
―――
३७८) ५०४ (१
३७८
―――
१२६) ३७८ (३
३७८
―――

अब १२६ इस महत्तम तथा दूसरी संख्या २८३५ का इन दोनों का महत्तम समापवर्त्य निकाला—

१२६) २८३५ (२२
२५२
―――
३१५
२५२
―――
इस लिये ६३ यह महत्तमाङ्क हुआ ६३) १२६ (२
१२६
―――
×

उदाहरणमाला (२)

निम्न संख्याओं का महत्तम समापवर्त्य निकालो—

(१) १३ ७९, २४०१

(२) ४२९, ७१५

T

(३) ६२, ७७२
(४) ३७७, ११३१
(५) २६६, २७५३
(६) १६१७, १२३, ७८६
(७) ७२३, ८०७, ७३५
(८) ३१४, ५७०, ६१८, ७२०

लघुत्तम समापवर्तक

१ कायदा—जिन संख्याओं का लघुत्तम निकालना है, उनको एक पंक्ति में लिखो और उनको २, ४, आदि अंकों में से किसी एक संख्या से बाँटो। वह संख्या ऐसी होनी चाहिये जो कम से कम दो संख्याओं को पूरी पूरी बांट दे। उनकी लब्धि नीचे रखते जाओ और जो न कटें उन को ज्यों का त्यों नई पंक्ति में उतारते जाओ। फिर इस नई पंक्ति को भी उचित रूढ़ि संख्या से भाग दो, तीसरी पंक्ति बनेगी। यह क्रिया तब तक करो जब तक अन्तिम पंक्ति में ऐसी संख्याऐं बनें जो किसी संख्या से न कटें। फिर सम्पूर्ण भाजकों और अन्तिम पंक्ति के सब संख्याओं का जो गुणन फल होगा आपस में गुणने से जो होगा वही लघुत्तम कहलावेगा।

जैसे—

```
२ | ८।१०।१२
  -----------
२ | ४। ५। ६
  -----------
    २। ५ ।३
```

यहां रूढ़ि संख्या २ से दो वार भाग देने से अन्तिम पंक्ति में ५।३ ये दो संख्या रही हैं, अब इन में किसी संख्या से अपवर्तन जाता नहीं है। इस लिये सब भाजकों का और अन्तिम पंक्ति की सब संख्याओं का परस्पर गुणनफल $= २ \times २ \times २ \times ५ \times ३ = १२०$ यह लघुतम समापवर्त्य हुआ।

T

दूसरा कायदा यह है, कि जिन संख्याओं का लघुत्तम समापवर्त्य निकालना होवे, उनके टुकड़े करके जिस संख्या के टुकड़ों का अधिकांशमें अन्य संख्याओं के टुकड़ों से मेल मिले उनका तथा जिन संख्याओं के टुकड़े न हों सकें उनका गुणनफल लघुत्तम समापवर्त्य होता है।

जैसे— ८=२×२×२
१०=२×५
१२=२×२×३

रूढ़ि संख्या वह संख्या है जो अपने और एक के अतिरिक्त किसी दूसरी पूर्णाङ्क संख्या से पूरी २ नहीं बटती—

यहां ८ संख्या के टुकड़े अधिकांश में तीनों २×२×२ इनके गुणनफल को अन्य दो संख्याओं के अनपवर्तित टुकडों से गुणा किया—तो २×२×२×५×३=११० यह लघुतम समापवर्त्य हुआ।

[द्वितीय उदाहरण] ३३,५५,८०,९० का लघुत्तम समापवर्त्य निकालना है।

३३=३×११
५५=५×११
६०=२×३×५×२
८०=२×२×२×५×२
९०=२×३×३×५

अब यहां २ अधिकांश में है ४ जगह हैं तथा ३ संख्या दो जगह हैं बाकी ११ तथा ५ दो संख्याएँ एक बार ही हैं इनका गुणनफल ३×११×२×२×५×२×२×३=७९२०। ∴ ७९२० लघुत्तमसमापवर्त्य हुआ।

उदाहरणमाला (३)

लघुत्तम समापवर्त्य निकालो—

(१) २४,१०,१२,४५,२५

T

(२) १५, १६, २०, १८, ४२
(३) ८, ९, १२, १८, ३०
(४) २२, १७, ३३, २५, ८५
(५) २८, ३६, ५४, ७२, ९०
(६) २२, ८८, १३२, १९८
(७) १७, ५१, ११९, २१०
(८) १२, १८, २०, १०५

भिन्नसंकलनम्

योगान्तरं तुल्यहरांशकानां कल्प्यो हरो रूपमहारराशेः। (लीलावती)

भिन्न राशियों का योग तथा अन्तर उसी अवस्था में होता है जब कि उन सब भिन्न राशियों का 'हर' एक हो। जो राशि पूर्ण होती है अर्थात् जिस राशि में 'हर' नहीं होता है उस राशि का हर रूप कल्पना करके योग तथा अन्तर किया जाता है।

सब भिन्नात्मक राशियों का एक 'हर' बनाने की क्रिया को लघुत्तम-समापवर्त्य कहते हैं। अर्थात् भिन्न राशियों के पृथग् २ हरों का एक मिश्रित हर लघुत्तमसमापवर्त्य की विधि से ही निष्पन्न होता है। पुनः लघुत्तम समापवर्त्य से भिन्न राशियों के हरों का एक मिश्रित हर बना कर योग तथा अन्तर करना चाहिये। इस प्रकार योग करने से जो भिन्नात्मक राशि बनती है उसको 'योग भिन्न' कहते हैं। संस्कृत में उसका नाम भिन्न संकलन है। इसलिये योग भिन्न की परिभाषा—

योगभिन्न—

योग भिन्न वह भिन्न है जिस का अंश सब अंशों का योगफल होता है। और जिस का 'हर' वही होता है जो सब भिन्नों के पृथक् २ 'हरों' के लघुत्तमसमापवर्त्य विधि से आया हो।

T

अन्तर भिन्न—

अन्तर भिन्न वह भिन्न है जिसका अंश सब अंशों के परस्पर अन्तरों से निष्पन्न हुआ हो तथा हर भी सब भिन्नों के पृथक् २ हरों के लघुत्तम समापवर्त्य विधि से ही आया हो ।

योग भिन्न का उदाहरण नं० (१)

यथा $\frac{३}{५}$, $\frac{४}{५}$, $\frac{२}{५}$ और $\frac{१}{५}$

इन भिन्नात्मक अङ्कों को जोड़ना है ।

क्रिया— ∵ $=\frac{३}{५}+\frac{४}{५}+\frac{२}{५}+\frac{१}{५}$

$$=\frac{३+४+२+१}{५}$$

$$=\frac{\overset{२}{१०}}{५}=२$$

=२ उत्तर

नोट—इस उपरोक्त उदाहरण में भिन्नात्मकराशियों का एक हर ५ ही हुआ । यहाँ इस बात का ध्यान रखना चाहिये कि लघुत्तम समापवर्त्य की विधि से आये हुए हर में प्रत्येक हर से भाग देकर, जो लब्धि आती है, उससे अंश का गुणा करके, एक बड़ी आड़ी लकीर के ऊपर सब अंशों को अलग २ गुणा करके लिखना चाहिये और लघुत्तम समापवर्त्यांङ्क को आड़ी लकीर के नीचे लिखना चाहिये । फिर ऊपर के अंशों को जोड़ कर अंश कल्पना करना चाहिये । हर वही लघुत्तमसमापवर्त्य ही रहता है । हर, अंश से निष्पन्न उत्तर ही उत्तर होता है ।

उदाहरण नं० (२) $\frac{१}{२}$, $\frac{५}{६}$ और $\frac{५}{९}$ तथा $\frac{२}{३}$ इन भिन्नात्मक अङ्कों का योगफल क्या होगा ।

क्रिया—

$$\frac{१}{२}+\frac{५}{६}+\frac{५}{९}+\frac{२}{३}$$ का योग फल निकालना है

इसलिये भिन्न राशियों के पृथक् २ हराङ्कों का लघुत्तम समापवर्त्य = २, ६, ९, ३ = १८

$$\because \frac{१}{२}+\frac{५}{६}+\frac{५}{९}+\frac{२}{३}$$

$$=\frac{९+१५+१०+१२}{१८}=\frac{४६}{१८}$$

$$=\frac{\cancel{४६}^{२३}}{\cancel{१८}_{९}}=\frac{२३}{९}$$

$$=\frac{२१}{९}$$

$$\therefore \text{उत्तर} = २\frac{५}{९}$$

नोट—योगफल करते समय भिन्न राशियों के हरों के लघुत्तम समापवर्त्याङ्क को पृथक् २ भिन्न के हर से भाग देने से जो लब्धि आती है उसको अंश से गुणा करके जो आड़ी लकीर के ऊपरी भाग में अलग गुणित अंश रखे गये है, उनके योग फल से जो नूतन अंश बना है तथा उसके नीचे जो लघुत्तम समापवर्त्याङ्क रखा है यथा उपरोक्त उदाहरण में

T

$=\frac{४६}{१८}$ यह हैं इसके हर तथा अंशों की भी किसी अपवर्तनाङ्क से अपवर्तित करके लिखा जा सकता है जैसे यहां २ से अंश तथा हर से अपवर्तन देकर $\frac{२३}{९}=$ यह लिखा गया। फिर इस विषम भिन्न को भी संयुक्त भिन्न बनाकर $=२\frac{५}{९}$ इस रूप में लिखा जाता है। इस प्रकार उपरोक्त उदाहरण में $२\frac{५}{९}$ यह ही उत्तर वास्तविक उत्तर हुआ, इस प्रकार सर्वत्र जानना चाहिये।

अन्तर भिन्न में केवल अंश ही अंशों के परस्पर अन्तर द्वारा उत्पन्न हुआ आयेगा और क्रिया सब योग की तरह से ही होंगी।

उदाहरण नं० (३)

यह संयुक्त भिन्न के जोड़ का उदाहरण है—

$३\frac{१}{२}+३\frac{१}{४}$ तथा $५\frac{५}{६}$ को जोड़ो।

क्रिया—

$=३\frac{१}{२}+३\frac{१}{४}+५\frac{५}{६}$ का योग फल करना है।

$$=३+३+५+\frac{१}{२}+\frac{१}{४}+\frac{५}{६}$$

$$=११+\frac{१}{२}+\frac{१}{४}+\frac{५}{६}$$

$$=११+\frac{६+३+१०}{१२}$$

T

$$=११+\frac{१९}{१२}$$

$$=११+१\frac{७}{१२}$$

$$=१२\frac{७}{१२} \text{ उत्तर}$$

नोट—संयुक्त भिन्नों के जोड़ने के लिये उपरोक्त उदाहरण के अनुसार क्रिया करनी चाहिये । इसमें इस बात का ध्यान अवश्य रखना चाहिये कि जो विषम भिन्न हों उनको भी यथासम्भव संयुक्त-भिन्न ही बना लिया जाये तो विशेष सुगमता रहती है ।

अभ्यासार्थ उदाहरणमाला (३)

निम्नलिखित भिन्नों को जोड़ो—

(१) $\frac{२}{७}, \frac{३}{७}, \frac{५}{७}$ (२) $\frac{१}{९}+\frac{२}{९}+\frac{३}{९}$ (३) $\frac{४}{११}, \frac{७}{११}, \frac{९}{११}$ (४) $\frac{८}{४८}, \frac{१६}{४८}, \frac{२१}{४८}$ (५) $\frac{८}{१००}, \frac{४}{५०}, \frac{२}{२५}$ (६) $\frac{१२}{६३}, \frac{१८}{६३}, \frac{५१}{६३}$ (७) $\frac{२}{३}, \frac{३}{४}, \frac{१}{२}$ (८) $\frac{७}{९}, \frac{५}{१२}, \frac{४}{१८}$ (९) $\frac{३}{१६}, \frac{७}{२०}, \frac{८}{१५}$ (१०) $\frac{२१}{३०}, \frac{९}{१६}, \frac{७}{१२}$

संक्षेप करो—

(११) $\frac{१}{९}+\frac{१}{१२}+\frac{१}{१५}$ (१२) $\frac{४}{५}+\frac{५}{४}+\frac{२}{१५}$ (१३) $\frac{५}{१२}+\frac{५}{१६}+\frac{५}{२०}+\frac{४}{१०}$ (१४) $\frac{१}{६}+\frac{१}{९}+\frac{१}{१५}+\frac{१}{२७}$ (१५) $\frac{७}{८}+\frac{७}{१२}+\frac{७}{१५}+$

T

$\frac{७}{२५}$ (१६) $\frac{३}{५१}+\frac{२१}{१७}+\frac{७}{९}+\frac{१}{२}$ (१७) $\frac{११७}{२२९}+\frac{२२६}{३३९}+\frac{५६५}{६७८}+\frac{११३}{३३९}$ (१८) $\frac{७}{१०}+\frac{१०}{१७}+\frac{१७}{२०}+\frac{२०}{५१}$ (१९) $\frac{३}{५}+\frac{५}{३}+\frac{९}{१५}+\frac{१५}{९}$ (२०) $\frac{७}{८}+\frac{७}{१२}+\frac{७}{१५}+\frac{७}{२५}$

उदाहरणमाला (४)

संयुक्त भिन्नों का योगफल निकालो—

(१) $५\frac{१}{१०}+७\frac{१}{४}$ (२) $२\frac{१}{२}+\frac{१}{८}+\frac{३}{९}$ (३) $७\frac{१}{२}+८\frac{१}{८}+१४\frac{१}{१४}$ (४) $३\frac{१}{३}+५\frac{१}{५}+१५\frac{१}{१५}$ (५) $१+\frac{१९}{४}+२\frac{१}{२}+३\frac{१}{१६}$ (६) $\frac{१०००}{७}+\frac{१००}{१४}+\frac{५०}{२८}+\frac{२५}{५६}$

(७) $२\frac{१}{१२}+८\frac{१}{९}+४\frac{५}{६}+\frac{७}{२}$

(८) $८\frac{१}{१२}+४\frac{५}{६}+७\frac{८}{२४}+६\frac{९}{४८}$

(९) $११\frac{१२}{३२}+१२\frac{१२}{४८}+१०\frac{११}{६४}+८\frac{१०}{३२}$

(१०) $५\frac{१}{२}+४\frac{२}{३}+४\frac{५}{६}+\frac{७}{८}$

भिन्नव्यवकलनम् ।

भिन्न राशि का व्यवकलन भिन्न राशियों के योग की तरह से होता है।

उदाहरण (१) $\frac{३}{७}$ को $\frac{६}{७}$ में से घटाओ।

क्रियाः— $=\frac{६}{७}-\frac{३}{७}=\frac{६-३}{७}=\frac{३}{७}$ $\therefore \frac{३}{७}$ उत्तर हुआ।

उदाहरण (२) $\frac{३}{८}$ को $\frac{४}{६}$ में से घटाओ।

क्रियाः— $=\frac{४}{६}-\frac{३}{८}=\frac{३२-१८}{४८}=\frac{७}{२४}=\frac{\not{१४}^{\,७}}{\not{४८}_{\,२४}}$

$\therefore \frac{७}{२४}$ उत्तर

नोट—भिन्न राशि के व्यवकलन में भिन्न के हरों का पहिले लघुत्तम समापवर्त्य निकालना चाहिये। भिन्न के हरों से लघुतम समापवर्त्य में भाग देकर लब्धि को ऊपर के अपने २ अंशों से गुणा करना चाहिये। फिर गुणा करने पर पृथक् पृथक् अंशों का उत्तर करने से जो अंश निष्पन्न होता है वही अन्तरराशि का अंश होता है। हर लघुत्तम समापवर्त्य ही होता है। इसमें भी निष्पन्न भिन्नराशि यदि विषम भिन्नराशि रहे तो यथासम्भव मिश्र भिन्नराशि बना देनी चाहिये।

उदाहरणमाला (५)

(१) $\frac{१}{३}-\frac{१}{४}$ (२) $\frac{७}{८}-\frac{३}{१६}$ (३) $\frac{७}{१८}-\frac{७}{२४}$ (४) $\frac{३}{१५}-\frac{१}{१५}$ (५) $\frac{५}{१४}-\frac{३}{२१}$ (६) $\frac{१३}{२०}-\frac{७}{५०}$ (७) $७\frac{१}{२}-२\frac{१}{७}$ (८) $\frac{९}{५}-\frac{५}{९}$ (९) $\frac{८}{९}-\frac{११}{१८}$ (१०) $७\frac{५}{८}-७\frac{३}{१६}$।

T

सावयव भिन्न राशि के अन्तर का उदाहरण।

उदाहरण (३)

$२\frac{१}{३}$ को $४\frac{१}{५}$ में से घटाओ।

क्रियाः— $= ४\frac{१}{५} - २\frac{१}{३}$ अन्तर करना है

$= \frac{२१}{५} - \frac{७}{३} = \frac{६३ - ३५}{१५}$

$= \frac{२८}{१५} = १\frac{१३}{१५}$

$\therefore १\frac{१३}{१५}$ उत्तर

नोट—सावयव भिन्न राशियों का जोड़ तथा अन्तर भिन्न राशियों को सवर्णित करके अर्थात् विषम भिन्न बनाकर लघुत्तम समापवर्त्य निकाल कर योगान्तर करके भी किया जाता है जो उपरोक्त उदाहरण में स्पष्ट है।

दूसरी विधि उसकी यह है:—

यथा उपरोक्त उदाहरण में ही $४\frac{१}{५} - २\frac{१}{३}$ को घटाना है।

क्रियाः—$= ४\frac{१}{५} - २\frac{१}{३}$ अन्तर करना है

$= ४ - २ - \frac{१}{३} - \frac{१}{५}$

$= २ - \frac{५ - ३}{१५}$

T

$$=२-\frac{२}{१५}$$

$$=\frac{३०-२}{१५}=\frac{२८}{१५}$$

$$\therefore १\frac{१३}{१५}$$ उत्तर

योग विधि जिस प्रकार कही गई है उसके अनुसार अन्तर विधि भी जाननी चाहिये।

उदाहरणमाला नं० (६)

(१) $९\frac{३}{५}-७\frac{१}{५}$ (२) $३\frac{१}{३}-\frac{२}{९}$ (३) $८\frac{१३}{२१}-२\frac{७}{२८}$

(४) $५\frac{१}{३}-२\frac{१}{२}$ (५) $७\frac{३}{५}-३\frac{५}{६}$ (६) $८\frac{१}{१२}-७\frac{३}{१६}$

(७) $१०\frac{१}{६}-\frac{३}{८}$ (८) $७-\frac{३}{८}$ (९) $१०-\frac{१८}{१७}$

(१०) $१८-४\frac{१}{१८}$

उदाहरणमाला नं० (७)

(१) $३\frac{१}{७}+४\frac{१}{८}-\frac{८}{१२}$ (२) $१२\frac{१}{१५}+७\frac{१}{५}-\frac{२}{५}$

(३) $८-१\frac{१}{२}+७\frac{१}{३}-२\frac{७}{१२}$ (४) $७\frac{१}{५}+९\frac{१}{१५}-१०\frac{१}{६}$

(५) $७-\frac{५०}{१४}+\frac{१००}{२१}+\frac{३००}{२८}+\frac{५}{७}$

(६) $\frac{१३}{१४} - ७\frac{१}{२} + ९ - २\frac{१}{७} + \frac{४}{७}$

(७) $३\frac{१}{३} + ४\frac{१}{४} - ५\frac{१}{५} - १\frac{१}{२०}$

(८) $१\frac{१}{२} + २\frac{३}{५} + ४\frac{५}{६} - २\frac{१}{२}$

भिन्नगुणनम्

अंशाहतिश्छेदवधेन भक्ता लब्धं विभिन्ने गुणने फलं स्यात् ।

(लीलावती)

भिन्नों के अंशों को आपस में गुणन करके अंश मानो । तथा हरों को भी परस्पर गुणन करके हर मानो । यदि भाग जा सकै तो लब्धि निकालनी चाहिये । वही उत्तर होता है ।

उदाहरण नं० (१)

$२\frac{१}{३}$ को $२\frac{१}{७}$ से गुणा करना है ।

क्रियाः —$= २\frac{१}{३} \times २\frac{१}{७}$

$= \frac{७}{३} \times \frac{१५}{७}$

$= \frac{\cancel{१०५}^{५}}{\cancel{२१}}$

$= \frac{५}{१}$

$= ५$ उत्तर

यहाँ पहिले १५ को ७ से गुणा किया १०५ हुए । यह अंश हुआ । फिर ७ को ३ से गुणा किया २१ हुए, यह हर हुआ । यहाँ अंश

में हर का भाग देकर रखा। अंश, हर से पूरा कट जाता है इसलिये— $\frac{५}{१}$ यह हुआ ५ में १ का भाग दिया ५ ही लब्धि आई यही उत्तर हुआ।

नोट—भिन्न राशि के भाग के उदाहरण में अंश, अंश के गुणन में हर, हर के गुणा का भाग देने से जो भिन्न राशि उत्पन्न होती है । यदि इस राशि के नूतन अंश तथा हर किसी राशि से कट सकें तो काट दो अर्थात् लघ्वाङ्क बना कर उत्तर किया जाता है । यदि नहीं कटें तो तथाऽवस्थ रहने देना चाहिये ।

उदाहरण नं० (२)

$\frac{१}{२}$ को $\frac{१}{३}$ से गुणा करना है ।

न्यासः $= \frac{१}{२} \times \frac{१}{३}$

$= \frac{१ \times १}{२ \times ३}$

$= \frac{१}{६}$ उत्तर

यहां भी अंश, अंश के घात में हर, हर के घात का भजनफल ही भिन्न राशि का गुणन फल हुआ, यह स्पष्ट है ।

उदाहरणमाला (८)

(१) $\frac{१}{२} \times \frac{१}{३} \times \frac{१}{४} \times \frac{१}{५}$ (२) $\frac{२}{३} \times \frac{३}{४} \times \frac{४}{५} \times \frac{५}{६}$

(३) $\frac{८}{२५} \times १७\frac{२}{३} \times \frac{१०५}{१०६}$ (४) $\frac{२७}{२८} \times \frac{४२}{५५} \times \frac{२२}{८१}$

(५) $\left(\frac{१}{२} + \frac{१}{३}\right) \times \left(\frac{१}{४} + \frac{१}{५}\right) \times \left(\frac{११}{१२} - \frac{१}{८}\right)$

T

(६) $\frac{१}{७} \times \frac{३}{७} \times ६\frac{१}{४} \times ४\frac{१}{१२} \times ११\frac{१९}{७५} \times १\frac{११}{११७}$

(७) $\frac{४३}{४७} \times \frac{१}{२} \times ६\frac{४}{१५} \times \frac{५}{१२९} \times १०\frac{६}{१७} \times १३\frac{१०}{११} \times \frac{१}{४}$

(८) $\left\{ \left(\frac{५}{६} - \frac{१}{१४} \right) \left(\frac{३}{२८} + \frac{४}{७} \right) \right\} \times \frac{७}{१६} \times २\frac{४}{१९}$

(९) $\left[\frac{१}{२} \left\{ \frac{३}{४} + \frac{२}{५} \left(१\frac{३}{४} - \frac{७}{१२} \times ३\frac{३}{४} \right) \right\} \right]$
$\times \frac{१५}{३१} \times १\frac{२९}{३१}$

(१०) $\left\{ \left(\frac{१}{३३} + \frac{३}{१६५} \right) \left(४ - \frac{६}{७} \right) \left(३ \text{ का } \frac{१}{४} \right) \right\}$ का
$\left\{ \left(३\frac{१}{२} \text{ का } १\frac{५}{१९} \right) \left(४\frac{१}{२} - २\frac{३३}{७२} \right) \right.$
$\left. \left(११४\frac{२}{७} + १२\frac{४}{७} \right) \right\}$

भिन्नभजनम् ।

छेदं लवं च परिवर्त्य हरस्य शेषः कार्य्योऽथ भागहरणे गुणना विधिश्च ।
(लीलावती)

भाजक के अंश तथा हर को उलटकर अर्थात् अंश के स्थान में हर और हर के स्थान में अंश लिखकर, इस नवीन उत्पन्न भिन्न से गुणन की कही हुई रीति के अनुसार भाज्यको गुणन करो। फल जो आवे वही भिन्न भाग हार में लब्धि जाननो चाहिये ।

उदाहरण नं० (१) ५ को $२\frac{१}{३}$ से भाग देना है ।

T

न्यासः—

$$= \frac{५}{१} \div २\frac{१}{३}$$

$$= \frac{५}{१} \div \frac{७}{३}$$

$$= \frac{५}{१} \times \frac{३}{७}$$

$$= \frac{१५}{७}$$

$$\therefore २\frac{१}{७}$$ उत्तर

यहाँ भाजक $\frac{७}{३}$ में अंश ७ और हर ३ है। उपरोक्त रीति उलटने पर $\frac{३}{७}$ भिन्न बनी। अब ५ को $\frac{३}{७}$ से गुणा किया तो $\frac{१५}{७}$ अर्थात् २ $\frac{१}{७}$ यही भजनफल हुआ।

उदाहरण (२) $\frac{१}{६} \div \frac{१}{३}$ को संक्षिप्त करना है।

न्यासः—

$$= \frac{१}{६} \div \frac{१}{३}$$

$$= \frac{१}{\cancel{६}_{२}} \times \frac{\cancel{३}}{१}$$

$$= \frac{१}{२}$$ उत्तर

नोट—जिस किसी भिन्न के प्रश्न में एक ही भिन्न पंक्ति में योग, अन्तर, गुणन, और भाग के चिह्न एक साथ हों अथवा दो वा तीन

T

चिह्न हों वहां सबसे पहिले 'भाग', फिर 'गुणा' फिर 'योग' और फिर सब से बाद में 'व्यवकलन' के चिह्न को खोलकर क्रिया करनी चाहिये।

यदि दो कोष्ठों के बीच में भाग का चिह्न हो तो पहिले कोष्ठगत धन ऋण के चिह्नों को खोल कर भाग देना चाहिए। उस हालत में भाग चिह्न पहिले नहीं खुलेगा।

उदाहरणमाला (९)

(१) $\frac{१}{२} \div \frac{१}{३}$ (२) $\frac{३}{४} \div \frac{५}{६}$ (३) $\frac{११}{१५} \div \frac{१२}{७५}$

(४) $\left(१\frac{७}{८} + २\frac{३}{५} \right) \div \left(१८ - \frac{१}{१०} \right)$

(५) $\frac{७६}{१४९} \div ४२$ (६) $\frac{१२५}{१२६} \div ९५$

(७) $\left\{ \frac{१}{२} \div \left(\frac{६}{६} \text{ का } २\frac{१}{३} \right) \right\} \div \left\{ \frac{८७}{८८} \times \left(\frac{३}{४} + \frac{२५}{४४} \right) \right\}$

(८) $\dfrac{\frac{११}{१०८} \div \frac{१}{२५}}{\frac{८}{९} \div \frac{२}{३} - \frac{१}{४} \div \left(१\frac{७}{८} \text{ का } ४\frac{४}{५} \right)} \div १\frac{१९}{२१}$

(९) दो राशियों का गुणन फल $७\frac{१}{२}$ है। एक राशि $३\frac{३}{४}$ है तो दूसरी राशि बताओ।

(१०) $७१\frac{५}{६}$ को ६ से भाग दो।

T

कोष्ठगत भिन्न का संक्षेप—

नियम—भिन्न के प्रश्नों में कोष्ठों का भी प्रयोग किया जाता है। कोष्ठ तीन प्रकार के माने जाते हैं (१) छोटा कोष्ठ या कनिष्ठ कोष्ठ ( ) यह हैं। (२) मझोला कोष्ठ { } यह है इसको मध्य कोष्ठ भी कहते हैं। बड़ा कोष्ठ [ ] यह है इसको ज्येष्ठ कोष्ठ भी कहते हैं। भिन्न राशि का अलग २ संकलन तथा व्यवकलन, गुणन तथा भजन समझाया जा चुका है। अब कोष्ठगत भिन्नराशियों का संक्षेप दिखलाया जाता है, जिसमें भिन्नराशि का संकलन, व्यवकलन, गुणन, भजन आदि यथासम्भव मिश्रित हों।

भिन्नराशियों के प्रश्नों को संक्षेप करने के लिये सब से पहिले इस बात पर ध्यान देना चाहिये कि किन किन भिन्नाङ्कों पर आड़ो लकीर है, किन २ में छोटा कोष्ठ है, किन २ भिन्नाङ्कों पर मझला कोष्ठ लिखा है। इस लिये भिन्न राशि में सब से पहिले जिस भिन्न राशि पर मोटा खत यानी आड़ी लकीर हो उसको खोलना चाहिये। इसके बाद में छोटा कोष्ठ खोलना चाहिये। इसके बाद में मझले कोष्ठ को खोलना चाहिये। इसके बाद में बड़े कोष्ठ को खोला जाता है।

फिर भाग के चिह्न पर ध्यान देना चाहिये। अर्थात् भाग को खोलना चाहिये। भाग के खोलने के साथ-साथ इस बात को ध्यान में रखनी चाहिये, कि भाग के दाईं ओर अथवा बाईं ओर भिन्नाङ्कों का सम्बन्ध परस्पर गुणा का यानी जरब का है या नहीं। यदि जरब का यानी गुणा का सम्बन्ध हो तो उसे काट कर तभी भाग देना चाहिये।

कोष्ठ को खोलते समय कोष्ठ के पूर्व में गुणा या भाग, धन या ऋण आदि का चिह्न कोई भी न होवे तो वहाँ गुणा का चिह्न जानना चाहिये। तब भिन्नगत कोष्ठों को खोल कर संक्षेप करना चाहिये।

T

जैसे ३ (५ — ४) इस उदाहरण में यह स्पष्ट है, कि यहां ५ तथा ४ के अन्तर १ को, ३ संख्या से गुणा करना है । इसलिये गुणनफल ३ हुआ । अतः अनिर्धारित चिह्न के स्थान में गुणा का चिह्न ही कल्पना किया जाता है ।

इसी प्रकार यदि किसी कोष्ठ के पूर्व — ऋण का चिह्न हो और कोष्ठ के अन्दर ऋण का या धन का चिह्न हो, तो वह कोष्ठ के खोलने में ऋण का धन तथा धन का ऋण किया जाता है ।

जैसे ८ —(७ — ४ + १) यह प्रश्न है । यहां कोष्ठ से पूर्व ऋण का चिह्न है । कोष्ठ के अन्दर भी ऋण तथा धन के चिह्न हैं । यहाँ दोनों चिह्न उलट जायेंगे । फिर कोष्ठ नहीं रहेगा ।

इसलिये = ८ — ७ + ४ — १

= ४ यह उत्तर हुआ ।

कोष्ठगत भिन्न के संक्षेप का उदाहरण ।

उदाहरण नं० (१)

$$६ - \left[\frac{३}{४} + \left\{ ३\frac{१}{२} - \left(१\frac{१}{२} + \frac{३}{४} \right) \right\} \right]$$

क्रिया:—
$$= ६ - \left(\frac{३}{३} + \left\{ ३\frac{१}{२} - \left(१\frac{१}{२} + \frac{३}{४} \right) \right\} \right]$$

$$= ६ - \left[\frac{३}{४} + \left\{ \frac{७}{२} - \left(\frac{३}{२} + \frac{३}{४} \right) \right\} \right]$$

$$= ६ - \left[\frac{३}{४} + \left\{ \frac{७}{२} - \left(\frac{६ + ३}{४} \right) \right\} \right]$$

$$= ६ - \left[\frac{३}{४} + \left\{ \frac{७}{२} - \frac{९}{४} \right\} \right]$$

$$= ६ - \left[\frac{३}{४} + \left\{ \frac{१४ - ९}{४} \right\} \right]$$

$$= \text{६} - \left[\frac{\text{३}}{\text{४}} + \frac{\text{५}}{\text{४}} \right]$$

$$= \text{६} - \left[\frac{\text{३} + \text{५}}{\text{४}} \right]$$

$$= \frac{\text{६}}{\text{१}} - \frac{\text{८}}{\text{४}}$$

$$= \frac{\text{२४} - \text{८}}{\text{४}}$$

$$= \frac{\text{१६}}{\text{४}} = \text{४ उत्तर}$$

कोष्ठ के प्रश्नों में जिस भिन्न पर आड़ी लकीर होती है उस को ही सब से पहिले खोलना चाहिये।

जैसे $= \frac{\text{२}}{\text{३}} + \left(\frac{\text{३}}{\text{४}} \times \overline{\frac{\text{५}}{\text{६}} + \frac{\text{७}}{\text{९}}} \right)$

$$= \frac{\text{२}}{\text{३}} + \left(\frac{\text{३}}{\text{४}} \times \frac{\text{१५} + \text{१४}}{\text{१८}} \right)$$

$$= \frac{\text{२}}{\text{३}} + \left(\frac{\text{३}}{\text{४}} \times \frac{\text{२९}}{\text{१८}} \right)$$

$$= \frac{\text{२}}{\text{३}} + \frac{\text{२९}}{\text{२४}}$$

$$= \frac{\text{१६} + \text{२९}}{\text{२४}} = \frac{\text{४५}}{\text{२४}}$$

$$= \frac{\text{४५}}{\text{२४}} = \text{१}\frac{\text{२१}}{\text{२४}}$$

$$\therefore \text{१}\frac{\text{७}}{\text{८}} \text{ उत्तर}$$

नोट—यहाँ इस उदाहरण में स्पष्ट है कि पहिले गुणा का चिह्न खोलकर तब योग करके प्रश्न हल करना चाहिये था। परन्तु योग की भिन्न पर— यह आड़ी लकीर लगाई गई है। यह लकीर बतलाती है कि पहिले योग के चिह्न को ही खोलो। इसलिये भिन्न के प्रश्नों में यदि आड़ी लकीर हो तो सब से पहिले आड़ी लकीर वाली भिन्न खोलनी चाहिये।

भिन्न में यदि भाग का चिह्न रहता है, तो पहिले भाग को खोल कर क्रिया करनी चाहिये। अर्थात् प्रश्नकर्ता जिस चिह्न का निर्देश करे उसके अनुसार क्रिया करके भिन्न को खोलना चाहिये। जैसे भाग के लिये—

उदाहरण(१) $= ३ + \frac{५}{६} \div \frac{१२}{१८} \times \frac{१}{४} — \frac{१}{२}$

क्रिया:- $= ३ + \frac{५}{\cancel{६}} \times \frac{\overset{३}{\cancel{१८}}}{१२} + \frac{१}{४} - \frac{१}{२}$

$= \frac{३}{१} + \frac{१५}{१२} + \frac{१}{४} - \frac{१}{२}$

$= \frac{३}{१} + \frac{१५}{१२} + \frac{१}{४} - \frac{१}{२}$

$= \frac{३६ + १५ + ३ — ६}{१२}$

$= \frac{\overset{४}{\cancel{४८}}}{\cancel{१२}}$

$= ४$ उत्तर हुआ।

यहाँ इस उदाहरण में पहिले भाग खोल लिया गया तब और क्रिया की गई।

इसलिये सब से पहिले — मोटा खत यानी आड़ी लकीर को खोलो यदि आड़ी लकीर दी हुई हो। इसके बाद भाग को खोलो फिर

छोटा कोष्ठ, इसके बाद मझला कोष्ठ, बाद में बड़ा कोष्ठ, फिर जोड़ या घटाना आदि खोल कर भिन्न को संक्षिप्त करना चाहिये। यह सिद्धान्त निश्चित हुआ।

उदाहरणमाला (१०)

निम्नलिखित भिन्न के उदाहरणों को संक्षिप्त करो—

(१) $६ - \left\{ १\frac{१}{२} - \left(\frac{३}{४} - \frac{१}{२} \right) \right\}$

(२) $१६\frac{१}{२} - \left\{ ६\frac{१}{४} \times \left(४\frac{१}{२} + \frac{१}{४} \right) \right\}$

(३) $३ \div \left[२ + ३ \div \left\{ ४ + ५ \div \left(१ - \frac{१}{३} \right) \right\} \right]$

(४) $५\frac{१}{२}$ का $\left[२\frac{३}{४} \times \left\{ \frac{७}{१२} - \frac{३}{४} \left(\frac{२}{३} - \frac{१}{६} - \frac{१}{८} \right) \right\} \right]$

(५) $२\frac{२}{५} \times ४\frac{१}{५} \left\{ \left(१\frac{१}{२} + \frac{२}{३} \right) + \frac{२}{५} \div \frac{७}{८} \right\}$

(६) $४\frac{४}{५} \div \frac{२}{४} \left[२\frac{१}{२} + \left(४\frac{१}{३} \div १\frac{१}{२} \right) - \frac{४}{५}$

(७) $\left(\frac{९ - ४}{५} \div \frac{१}{७} \right) \times \left(\frac{६ - ४}{५} \div \frac{१}{७} \right)$

(८) $५\frac{१}{२} - \left[२\frac{१}{२} \div \left\{ \frac{३}{४} - \frac{२}{३} \left(\frac{१}{२} - \overline{\frac{१}{६} - \frac{३}{१२}} \right) \right\} \right]$

(९) $८ - \left[४ - \frac{१}{२} \left\{ ७ - \left(३ \div \overline{२ - \frac{१}{२}} \right) \right\} \right]$

(१०) $९\frac{१}{२} + \left[७\frac{१}{२} - \left\{ ४ + \left(५ - ४ \right) \right\} \right]$

T

रेखास्थ भिन्न जाति को संक्षेप बनाने का उदाहरण—

प्र० (१) $$\frac{३\frac{१}{४} - २\frac{१}{३} \times १\frac{२}{७} - \frac{१}{७}}{\left(३\frac{१}{४} - २\frac{१}{३}\right)\left(१\frac{२}{७} - \frac{१}{७}\right)}$$ इस भिन्न का संक्षिप्त स्वरूप जानना है।

क्रियाः— $$= \frac{३\frac{१}{४} - २\frac{१}{३} \times १\frac{२}{७} - \frac{१}{७}}{\left(३\frac{१}{४} - २\frac{१}{३}\right)\left(१\frac{२}{७} - \frac{१}{७}\right)}$$

$$= \frac{\frac{१३}{४} - \frac{७}{३} \times \frac{९}{७} - \frac{१}{७}}{\left(\frac{१३}{४} - \frac{७}{३}\right)\left(\frac{९}{७} - \frac{१}{७}\right)}$$

$$= \frac{\frac{१३}{४} - \frac{३}{१} - \frac{१}{७}}{\left(\frac{३९ - २८}{१२}\right)\left(\frac{९ - १}{७}\right)}$$

$$= \frac{\frac{९१ - ८४ - ४}{२८}}{\frac{११}{१२} \times \frac{८}{७}}$$

$$= \frac{\frac{३}{२८}}{\frac{२२}{२१}}$$

T

$$=\frac{३}{२८}\div\frac{२२}{२१}$$

$$=\frac{३}{२८}\times\frac{२१}{२२}$$

$$=\frac{९}{८८} \quad \text{उत्तर}$$

$$=\frac{९}{८८}$$ यही संक्षिप्त स्वरूप हुआ।

नोट—ऐसे भिन्न के प्रश्नों के संक्षेप करने के लिये बड़ी आड़ी लकीर के ऊपर के अंश के मान को तथा नीचे के हर के मान को साथ-साथ खोलते रहना चाहिये। मिश्रभिन्न को विषमभिन्न बना कर लघुत्तम समापवर्त्य आदि विधि से धन तथा ऋण गत कोष्ठ को खोलना चाहिये। इस प्रकार अन्त में बड़ी आड़ी लकीर के ऊपर की एक भिन्न रहेगी। उसको भाज्य मानना नीचे हर स्थान में भी एक भिन्न रहेगी उसको भाजक मानना। जिस स्थल में आड़ी लकीर के ऊपर के अंश स्थान में अथवा हर स्थान में अथवा किसी एक में पूरी संख्या आवे वहाँ (कल्प्यो हरो रूपमहारराशेः) इस नियम के अनुसार पूर्ण संख्या को अंश, फिर उसके नीचे हर रूप यानी एक कल्पना करके, उसको भिन्न रूप में लाकर क्रिया करनी चाहिये। फिर भाज्यगत भिन्न में भाजकगत भिन्न का भाग देना चाहिये। इस प्रकार जो भिन्न अन्त में भजनफल के रूप में आयेगी वही संक्षिप्त स्वरूप प्रश्न का जानना चाहिये।

उदाहरण नं० (२) $$\frac{३\frac{१}{२}-२\frac{१}{६}}{\frac{१}{४}\times\left(\frac{१}{५}+\frac{१}{७}\right)}\div१५\frac{५}{९}$$

T

इसका संक्षिप्त स्वरूप निकालो ।

क्रियाः—

$$= \frac{३\frac{१}{२} - २\frac{१}{६}}{\frac{१}{४} \times \left(\frac{१}{५} + \frac{१}{७}\right)} \div १५\frac{५}{९}$$

$$= \frac{\frac{७}{२} - \frac{१३}{६}}{\frac{१}{४} \times \left(\frac{१}{५} + \frac{१}{७}\right)} \div \frac{१४०}{९}$$

$$= \frac{\frac{७}{२} - \frac{१३}{६}}{\frac{१}{४} \times \left(\frac{७+५}{३५}\right)} \div \frac{१४०}{९}$$

$$= \frac{=\frac{२१-१३}{६}}{\frac{१}{\cancel{४}} \times \frac{\cancel{१२}\,३}{३५}} \div \frac{१४०}{९}$$

$$= \frac{\frac{८}{६}}{\frac{३}{३५}} \div \frac{१४०}{९}$$

$$= \left(\frac{८}{६} \div \frac{३}{३५}\right) \div \frac{१४०}{९}$$

$$= \left(\frac{८}{६} \times \frac{३५}{३}\right) \div \frac{१४०}{९}$$

$$= \frac{२८०}{१८} \div \frac{१४०}{९}$$

T

$$=\frac{\overset{२}{\cancel{२८८०}}}{\underset{१}{\cancel{१८}}}\times\frac{\cancel{६}}{\cancel{१४४०}}$$

$$=\frac{\cancel{२}}{\cancel{२}}=१$$

= १ यही उत्तर हुआ।

उदाहरण नं० (३)

$$=\frac{\frac{३}{७}-\frac{२}{९}}{\frac{३}{७}+\frac{२}{९}}\times २\frac{११}{२६}\div\frac{४}{१३-३\frac{८}{९}}+३\frac{११}{१६}-\frac{३}{३-१\frac{१०}{१३}}$$

इसका संक्षिप्त स्वरूप निकालो।

$$=\frac{\frac{२७-१४}{६३}}{\frac{२७+१४}{६३}}\times\frac{६३}{२६}\div\frac{४}{\frac{१३}{१}-\frac{३५}{९}}+\frac{५९}{१६}-\frac{३}{\frac{३}{१}-\frac{२३}{१३}}$$

$$=\frac{\frac{१३}{६३}}{\frac{४१}{६३}}\times\frac{६३}{२६}\div\frac{४}{\frac{११७\ ३५}{९}}+\frac{५९}{१६}-\frac{३}{\frac{३९-२३}{१३}}$$

$$=\frac{\frac{१३}{६३}}{\frac{४१}{६३}}\times\frac{६३}{२६}\div\frac{४}{\frac{८२}{९}}+\frac{५९}{१६}-\frac{३}{\frac{१६}{१३}}$$

$$=\frac{१३}{६३}\div\frac{४१}{६३}\times\frac{६३}{२६}\div\frac{४}{१}\div\frac{८२}{९}+\frac{५९}{१६}-\frac{३}{१}\div\frac{१६}{१३}$$

$$=\frac{१३}{६३}\times\frac{६३}{४१}\times\frac{६३}{२६}\div\frac{४}{१}\times\frac{९}{८२}\times\frac{५९}{१६}—\frac{३}{१}\times\frac{१३}{१६}$$

$$=\frac{\cancel{१३}}{\cancel{६३}}\times\frac{६३}{४१}\times\frac{\cancel{६३}}{\underset{२}{\cancel{२६}}}\div\frac{\overset{२}{\cancel{४}}}{१}\times\frac{९}{\underset{४१}{\cancel{८२}}}+\frac{५९}{१६}—\frac{३९}{१६}$$

$$=\frac{६३}{८२}\div\frac{१८}{४१}+\frac{५९}{१६}—\frac{३९}{१६}$$

$$=\frac{\overset{७}{\cancel{६३}}}{\underset{२}{\cancel{८२}}}\times\frac{\cancel{४१}}{\underset{२}{\cancel{१८}}}+\frac{५९}{१६}—\frac{३९}{१६}$$

$$=\frac{७}{४}+\frac{५९}{१६}—\frac{३९}{१६}$$

$$=\frac{२८+५९—३९}{१६}$$

$$=\frac{\cancel{४८}}{\cancel{१६}}=३ \text{ उत्तर।}$$

नोट—ऐसे भिन्न के प्रश्नों को संक्षेप करने में बड़ी आड़ी लकीर के अंश के मान को तथा हर के मान को साथके साथ खोलते जाना चाहिये। फिर क्रम से भाग एवं गुणा को खोलकर संक्षेप स्वरूप बनाते जाना चाहिये। इस प्रकार जो अन्त में संक्षेपस्वरूप आता है वही उत्तर जानना चाहिये।

कोष्ठगत भिन्न तथा रेखास्थभिन्न का मिश्रित

उदाहरण नं० ४

प्रश्न

क्रियाः $=\left\{\frac{१}{८}\text{ का }\left(\frac{१}{२}—\frac{१}{३}\right)\div\frac{\frac{१}{४}+\frac{२}{३}\div\left(\frac{३}{५}+\frac{३}{१}\right)}{\frac{३}{४}—\frac{२}{३}\div\left(\frac{२}{५}+\frac{१}{२}\right)}\right\}$

T

$$\therefore = \left\{ \frac{१}{८} \text{ का } \left(\frac{३-२}{६} \right) \div \frac{= \frac{३+८}{१२} \div \left(\frac{३+१५}{५} \right)}{= \frac{९-८}{१२} \div \left(\frac{४+५}{१०} \right)} \right\}$$

$$= \left\{ \frac{१}{८} \text{ का } \frac{१}{६} \div \frac{\frac{११}{१२} \div \frac{१८}{५}}{\frac{१}{१२} \div \frac{९}{१०}} \right\}$$

$$= \left\{ \frac{१}{८} \text{ का } \frac{१}{६} \div \frac{\frac{११}{१२} \times \frac{५}{१८}}{\frac{१}{\cancel{१२}_{६}} \times \frac{\cancel{१०}^{५}}{९}} \right\}$$

$$= \left\{ \frac{१}{८} \text{ का } \frac{१}{६} \div \frac{\frac{५५}{२१६}}{\frac{५}{५४}} \right\}$$

$$= \left\{ \frac{१}{८} \text{ का } \frac{१}{६} \div \frac{५५}{२१६} \div \frac{५}{५४} \right\}$$

$$= \left\{ \frac{१}{८} \text{ का } \frac{१}{६} \div \frac{\cancel{५५}^{११}}{\cancel{२१६}_{४}} \times \frac{\cancel{५४}}{\cancel{५}} \right\}$$

$$= \left\{ \frac{१}{८} \text{ का } \frac{१}{६} \div \frac{११}{४} \right\}$$

$$= \left\{ \frac{१}{८} \text{ का } \frac{१}{६} \times \frac{४}{११} \right\}$$

$$= \frac{१}{\underset{२}{\cancel{८}}} \text{ का } \frac{\cancel{४}}{६६}$$

$$\therefore \frac{१}{१३२} \text{ उत्तर हुआ ।}$$

नोट—कोष्ठगत भिन्न तथा रेखास्थ भिन्न के मिश्रित उदाहरण में बृहद्रेखा, यानी बड़े मोटे खत के ऊपर या नीचे स्थित छोटे कोष्टों को खोल कर फिर भाग के चिह्न को खोले इस प्रकार पहिले बड़े मोटे खत के भिन्न को सरल करले वाद में अन्य कोष्ठ आदि को खोलना आरम्भ करे । अर्थात जैसे भी प्रश्न की आकांक्षा हो उसको ध्यान में रखते हुए पूर्वोक्त नियमानुसार भिन्नों को संक्षिप्त करना चाहिये ।

उदाहरणमाला (११)

(१) $\frac{६}{८} + \frac{२}{९}\left(३ - \frac{२}{७}\right) \div \dfrac{\frac{७}{८} - \frac{२}{५} \div \frac{४}{७}}{७ + \frac{२}{५} \times \frac{४}{११}}$

(२) $\frac{१}{३} - \left(\frac{५}{६} + \frac{२}{३} + \frac{५}{६}\right) \div \dfrac{१ - \frac{३}{४} + \frac{५}{१७}}{\frac{१}{७} + \frac{५}{८} - \frac{१}{२}}$

(३) $\frac{५}{२०} + \frac{३}{४}\left\{\frac{५}{६} - \frac{१}{४} \times \left(५ - \dfrac{\frac{३}{७} + \frac{५}{८}}{\frac{२}{५} \times \frac{३}{११}}\right) \div \frac{१४}{१७}\right.$

(४) $\frac{२}{५} - \frac{१}{३}\left\{\frac{२}{३} \div \frac{८}{१२}\left(\frac{३}{४} - \dfrac{\frac{१}{७} + \frac{२}{७}}{\frac{४}{७} - \frac{२}{५}}\right)\right.$

T

भागानुबन्ध भिन्न तथा भागापवाह भिन्न का उदाहरण में निवेश—

उदाहरण (१)—$\frac{१}{४}$ अपने $\frac{१}{३}$ में जोड़ा और फिर उनमें जोड़ का $\frac{१}{२}$ जोड़ने से क्या होगा ?

नियम—यदि भागानुबन्ध तथा भागापवाह भिन्न में एक का भाग अपने अंश से अधिक वा ऋण हो वहां सब से नीचे के हर से सब से ऊपर के भिन्न के हर को गुणा करे, और हर के स्थान में लिखे। यदि धन हो तो नीचे के हर में अंश जोड़ कर और ऋण हो तो घटा कर ऊपरके अंश को गुणा करे और फलको अंश लिखे।

इस नियम के अनुसार उपरोक्त उदाहरण की भिन्नों को ऊपर नीचे लिखा।

$\frac{१}{४}$	$\frac{३}{८}$	$\frac{१२}{२४}$
$\frac{१}{३}$	$\frac{१}{३}$	
$\frac{१}{२}$		

अब यहाँ सबसे नीचे के हर को यानी २ को ऊपर के भिन्नके हर ४ में गुणा किया $= २ \times ४ = ८$ यही हर हुआ और धन होने से हर २ को उसी के १ अंश में जोड़ा तो ३ हुए। इसको ऊपरके अंश १ से गुणा किया तो $३ \times १ = ३$ हुए। यही अंश हुआ। इससे $\frac{३}{८}$ यह भिन्न बनी। अब फिर $\frac{१}{३}$ के साथ $\frac{३}{८}$ भिन्नकी क्रिया की। यहां भी नीचेके हर ३ को ऊपरके हर ८ से गुणा किया $= ३ \times ८ = २४$, धन होने से हर ३ को अपने अंश १ में जोड़ा $= ३ + १ = ४$ हुए। इसको ऊपर के अंश ३ से गुणा किया $= ४ \times ३ = १२$ हुए। अब यह सवर्णित करने $\frac{१२}{२४}$ भिन्न बनी।

$\frac{१२}{२४} = \frac{१}{२}$ यही उत्तर उपरोक्त प्रश्न का हुआ।

उदाहरण (२)—$\frac{२}{३}$ में से उसका $\frac{१}{८}$ घटाया और शेष का $\frac{३}{७}$ उस (शेष) में से घटाया तो क्या बचा ?

T

अब यहाँ भी पहिले ही नियम से सबसे नीचे के ७ के अङ्क हर को ऊपर के हर ३ से गुणा = ७ × ३ = २१ यह हर हुआ। ऋण होने से ७ में से ३ घटाये = ७—३ = ४ बचे। ऊपर अंश २ से गुणा किया = ४ × २ = ८ को अंश माना इस प्रकार $\frac{८}{२१}$ भिन्न बनी। अब $\frac{८}{२१}$ को $\frac{१}{८}$ से सवर्णित किया तो यहाँ भी नीचे के हर ८ को २१ से गुणा १६८ हुआ, यह हर हुआ, फिर ऋण होने से हर में अंश घटाया = (८-१) = ७ को ऊपर के अंश ८ से गुणा किया = ५६ हुआ। यह अंश माना। इस प्रकार $\frac{५६}{१६८}$ यह भिन्न सवर्णित करने से आई।

$\frac{२}{३}$	$\frac{८}{२१}$	$\frac{५६}{१६८}$
$\frac{१}{८}$	$\frac{१}{८}$	
$\frac{३}{७}$		

$\frac{५६}{१६८} = \frac{१}{३}$ यह भी उत्तर है। इस प्रकार भागानुबन्ध तथा भागापवाह भिन्न को सवर्णित किया जाता है, इसी सिद्धान्त को भास्कराचार्यजी ने स्पष्ट लिखा है। कि—

तलस्थहारेण हरं निहन्यात् स्वांशाधिकोनेन तु तेन भागान्। इति

उदाहरणमाला (१२)

[भागानुबन्ध और भागापवाह भिन्न के उदाहरण]

(१) २५ $\frac{८}{१०}$, २० $\frac{१}{८}$, १० $\frac{२७}{५०}$, ५० $\frac{२}{३}$ को साधारण भिन्न में परिवर्तन करो।

(२) ४८) रुपये कुछ आदमियों में बाँटे गये। पहिले को $\frac{१}{२}$,

दूसरे को बाकी का $\frac{३}{४}$, तीसरे को शेष का $\frac{५}{६}$, चौथे को शेष का $\frac{१}{३}$ दिया गया तो सब कितना दिया ?

(३) $८\frac{४}{५}$, $९\frac{२}{३}$, $१०\frac{३}{५}$, $५०\frac{६}{१५}$, को साधारण भिन्न में परिवर्तन करो ।

(४) $\frac{६}{१८}$ में से उसका $\frac{४}{६}$ घटा कर शेष में उसका $\frac{११}{१५}$ घटाओ, जो शेष रहे उसमें से उसी का $\frac{१}{६}$ घटाओ, घटाने पर शेष का मान बताओ।

(५)—$\frac{१}{३}$ अपने $\frac{१}{८}$ से कम और शेष में उसका $\frac{६}{७}$ जोड़ा हुआ कितना होगा।

उदाहरणमाला (१३)

[भाग जाति भि न के कुछ उदाहरण—]

(१) $\frac{२}{५}$, $\frac{१}{४}$, $\frac{७}{८}$, $\frac{११}{१२}$ इन भिन्नों का योगफल निकालो तथा योगफल को ८ संख्या में घटाओ ।

(२) किसी तालाब की भूमि का $\frac{१}{१०}$ हिस्सा सूखा पड़ा है । $\frac{१}{३}$ हिस्सा नील कमल से घिरा हुआ है । शेष भाग में केवल पानी ही है तो बताओ कितने भाग में पानी है ।

(३) $३\frac{१}{४}$ तथा $५\frac{४}{२}$ का योग उनके अन्तर से कितना बड़ा है ।

(४) भ्रमरों के एक समूह में ३६ भ्रमर थे । उनका $\frac{१}{१२}$ भाग मालती पर चला गया, $\frac{१}{६}$ भाग चम्पा के वृक्ष पर गया । $\frac{१}{३}$ कदम्ब पर गया । फिर $\frac{१}{४}$ हिस्सा जूही पर चला गया, बतलाओ कौनसा भाग शेष रहा और उसमें कितने भ्रमर थे ।

T

[प्रभाग जाति के उदाहरण]

(१) $\frac{७}{८}$ का $\frac{५}{४२}$ का $\frac{२१}{२५}$ का $\frac{१०}{१२}$ । सरल करो ।

(२) १६ रुपयों का $\frac{७}{१७}$ का $\frac{५}{२१}$ का $\frac{३}{५}$ का $\frac{५१}{६४}$ का $\frac{१}{३}$ का मान बताओ ।

(३) $\frac{२३५}{१००८}$ का $\frac{१७}{३१}$ का $\frac{२८}{४७}$ का $\frac{१५५}{१६८}$ का $\frac{७}{९}$ का मान बताओ ।

(४) एक मन का $\frac{५}{१६}$ का $\frac{३}{७}$ का $\frac{४९}{५१}$ का $\frac{१७७}{२८०}$ का $\frac{१}{४५}$ हिस्से शक्कर एक पैसे में आती है । तो एक सेर के दाम क्या होंगे ।

(५) $\frac{२७}{२८}$ का $\frac{४९}{५४}$ का $\frac{१}{३}$ और $\frac{८}{९}$ का $\frac{१}{१६}$ का $\frac{११}{२०}$ का $\frac{५}{३८}$ का अन्तर बताओ ।

दशमलव भिन्न के विषय का निरूपण ।

यह विषय स्पष्ट है कि किसी संख्या का मान ईकाई से आरम्भ होता है । ईकाई से बाईं ओर लिखे हुए अङ्क उत्तरोत्तर दहाई सैकड़ा हजार आदि के स्थानों में स्थित होकर ईकाई की अपेक्षा दश गुणोत्तर वृद्धि को प्राप्त होते हैं । इसी प्रकार संख्यालेखन के नियम में बाईं ओर से दाहिनी ओर को अंकों के हटने में प्रत्येक स्थान पर आगे हटने से उनका मान दश गुना कम होता जाता है । यदि कोई

T

अंक दहाई के स्थान में है, तो दाहनी ओर का अंक ईकाई का अपने बांये अङ्क से दशवां भाग के समान होगा। इसी प्रकार सैकड़े से दहाई का दशमांश रहेगा। इस नियम से ईकाई के अंक से दाहिनी ओर आगे अंक यदि बढ़ते जांय तो इकाई के आगे का अंक का मान उसके साधारण मानसे उत्तरोत्तर दश, सौ, हजार आदि गुणा होता जायेगा। जैसे जैसे दाहिनी ओर अंक बढ़ते जायेंगे उनका मान दश गुणोत्तर कम होता जायेगा। प्रश्नों में ऐसी संख्या को दशमलव कहते हैं। दशम लव अर्थात् दशवां हिस्सा। इसका चिह्न एक ˙ विन्दु होता है।

जैसे १० ˙ १२३। इस उदाहरण में '०' शून्य यह इकायी के स्थान में स्थित है, 'एक' दहाई के स्थान में है। अब ईकाई के दाहिनी ओर दशमलव का चिह्न लगा है। इससे आगे १, २, ३, ये अंक हैं। ये संख्याएँ दशमलव की इस प्रकार बोली जाती हैं—दश दशमलव, एक, दो, तीन, (न कि एक सौ तेइस) इस लिये यहाँ यह स्पष्ट है कि दशमलव चिह्न से दाहिनी ओर का एक दशवाँ अंक $\frac{१}{१०}$ कहलावेगा। फिर इसके बाद का २ का सौवाँ हिस्सा, फिर तीन का हजारवाँ हिस्सा, इस प्रकार दश गुणोत्तर न्यूनता आती जावेगी।

इस लिये १० ˙ १२३ इस उदाहरण में दश दशमलव, एक, दो तीन का यह अर्थ है, १० संख्या में क्रम से एक, दो, तीन का दश गुणोत्तर अंश जुड़ा हुआ है। इस प्रकार भिन्न रूप में लिखा जायेगा।

$१०+\frac{१२३}{१०००}$ यह हुआ। इस लिये प्रत्येक अंक के दशमांश के हिसाब से इन तीनों अंकों में १२३ का एक सौ तेइस का हजारवाँ हिस्सा १० में जोड़ा जायेगा। इस प्रकार दशमलव की संख्या भिन्न रूपमें परिणत की जावेगी। इसका नाम दशमलव भिन्न है।

इसलिये १० ˙ १२३ = $१० \frac{१२३}{१०००}$ यह हुआ।

T

विन्दु के वाँई ओर के अंकों को पूर्ण राशि, और उसके दाहिनी ओर के अंकों को दशमलव भिन्न बोलते हैं। ऐसी संख्या को ही दशमलव भिन्न बोलते हैं क्योंकि दशमलव विन्दु की दाहिनी ओर के प्रत्येक अंक से भिन्न प्रकट होती है। जिसका 'हर' दशवां या दश का 'घात' वढ़ता जाया करता है। जैसे ऊपर के उदाहरण में स्पष्ट है।

दशमलव भिन्न के अन्तके अंक की दाहिनी ओर शून्य बढ़ाने से दशमलव के स्थान में कोई न्यूनाधिकता नहीं होती जैसे ३·२५ = ३·२५० = ३·२५०० यहाँ आगे की शून्यों से अंकों का स्थान दशमलव विन्दु की अपेक्षा नहीं वदलता। यहां इस वातका भी ध्यान रखना चाहिये कि पूर्ण राशि भी दशमलव रूप में प्रकट की जा सकता है। यदि उसके दाहिनी ओर दशमलव विन्दु लगाकर उसके बाद में शून्य रख दी जाय।

जैसे १५ इसको दशमलव में लाना है

= १५·०० यह दशमलव भिन्न बनी।

परन्तु दशमलव भिन्न कहलाने पर किसी भी पूर्ण संख्या के दशमलव अंक का मान क्रम से दश, सौ, हजार इत्यादि गुना कम होता जाता है। जैसे—

$$\cdot १ = \frac{१}{१०} \text{ एवं } \cdot ०१ = \frac{१}{१००}$$

$$\cdot ००१ = \frac{१}{१०००} \text{ इत्यादि}$$

इससे यह सिद्धान्त निश्चित हुआ कि दशमलव विन्दु की दाहिनी ओर को एक, दो तीन, स्थान हटाकर रखने से दशमलव भिन्न १०, १००, १००० से गुणित हो जाती है। और उसके विपरीत दशमलव

T

विन्दु के बाइँ ओर को एक, दो, तीन, स्थान हटाकर रखने से वह १०, १००, १०००, से विभाजित हो जाती है।

जिस प्रकार दशमलव संख्या को भिन्न रूपमें परिणत्त करके दशमलव भिन्न बनाई जाती है इसी प्रकार भिन्न स्वरूप में लिखी हुई संख्या को दशमलव रूपमें लिखा जाता है।

जैसे $\frac{३}{१०}$ यह भिन्न है इसको दशमलव स्वरूप में लाना है। तो इस प्रकार लिखा जायेगा = ·३, दशमलव तीन यह कहलावेगा।

एवं $२\frac{१}{१००}$ यह भिन्न भी २·०१ दो दशमलव, शून्य, एक ऐसे लिख जावेगी।

तथा $\frac{१}{१०}+\frac{४}{१०००}$ यह भिन्न है। इसका स्वरूप ·१०४, दशमलव एक, शून्य, चार यह कहलावेगा।

इसी प्रकार $४\frac{७}{१००००}$ यह भिन्न है। इसका स्वरूप ४·०००७ चार दशमलव, शून्य, शून्य, शून्य, सात, यह ऐसे लिखा जावेगा।

इस प्रकार सब दशमलव भिन्नों को लिखा जाता है। अर्थात् भिन्न संख्या, दशमलव स्वरूप में उक्त नियमानुसार बदली जा सकती है। तथा भिन्न संख्या में दशमलव का स्वरूप लाया जा सकता है।

दशमलव भिन्न को समान सामान्य भिन्न में परिवर्तन करने की विधिः।

उदाहरण (१)

·४२ दशमलव चार दो तथा ३·०२६ तीन दशमलव, शून्य, दो, छ को सामान्य भिन्न के रूप में परिवर्तन करना है।

T

क्रियाः—(१) $\cdot ४२ = ४२ \div १०० = \frac{४२}{१००}$

$= \frac{४२}{१००} = \frac{२१}{५०}$ उत्तर हुआ।

(२) ३·०२६

यहाँ भी $३०२६ \div १००० = \frac{३०२६}{१०००}$

$= \frac{३०२६}{१०००} = ३ + \cdot ०२६$

$= ३ + २६ \div १००० = ३ + \frac{२६}{१०००}$

$= ३ \frac{२६}{१०००} = \frac{३०२६}{१०००}$

ये दोनों उत्तर हो सकते हैं।

नोट—इससे यह सिद्धान्त निकला कि दशमलव भिन्न को समान सामान्य भिन्न में परिवर्तन करने के लिये दशमलव के आगे जितने अङ्क हों उतने शून्य, फिर शून्यों के बाँई ओर १ एक लिख कर जो संख्या बने उस से दशमलव संख्या में भाग दो तो भिन्न बन जायेगी। जैसा उपरोक्त पहिले उदाहरण में स्पष्ट है। जिस स्थल में पूर्णराशि तथा दशमलव भी हों, वहाँ बीच में से दशमलव का चिह्न हटा कर, जितने दशमलव के आगे अङ्क हों उतनी शून्य, फिर उसी प्रकार बाँई ओर १ लिख कर जो संख्या बने उससे दशमलव चिह्न हटी हुई उक्त संख्या को पूर्णाङ्क संख्या ही मान कर भाग देना चाहिये, तो भिन्न हो जायेगी। जैसा कि द्वितीय उदाहरण में स्पष्ट है।

इस लिये जितने दशमलव के आगे अङ्क हो एक पर उतने ही शून्य लगा कर उसे हर मानना। दशमलव विन्दु को हटा कर दशमलव भिन्न

को पूर्णाङ्क संख्या मान कर उसे अंश समझने से भिन्न बन जाती है।

जिस सामान्य भिन्न का हर १० के घात के तुल्य होता है उसको दशमलव भिन्न के रूप में लाने की रीतिः—

उदाहरण (१) $\frac{११}{१०}$ (२) $\frac{११}{१००}$ (३) $\frac{११}{१०००}$

इन भिन्नों को दशमलव भिन्न के रूप में लाना है।

क्रियाः—(१) $\frac{११}{१०} = ११ \div १० = १\cdot१$

यहाँ ११ में १० का भाग देने से १ लब्धि-पूर्ण आती है। एक शेष रह जाता है। वह दशमलव के आगे १ ऐसा लिखा जावेगा। इस लिए उक्त प्रश्न का उत्तर १·१ एक दशमलव, एक, यह हुआ।

क्रियाः=(२) $\frac{११}{१००} = ११ \div १०० = \cdot११$ यहाँ ग्यारह के नीचे १०० है। इसलिये एक के आगे दो शून्य हैं। तो यहाँ पूर्ण संख्या का अभाव रहेगा। इसलिये इसका उत्तर=·११=दशमलव एक, एक, ऐसा ही पुकारा जायेगा।

(३) $\frac{११}{१०००} = ११ \div १००० = \cdot०११$

इस उदाहरण में ग्यारह के नीचे एक हजार 'हर' है तो यहाँ दशमलव के चिह्न से आगे शून्य बढ़ा कर एक, एक, ऐसा ही लिखा जायेगा।

नोट—उपरोक्त उदाहरणों से यह सिद्धान्त निकला कि पहिले भिन्न के अंश पर ध्यान दो। और हर में जितने शून्य हो अंश में उतने ही अङ्कों के पीछे बाईं ओर दशमलव विन्दु रखो। यदि अंश के अङ्कों की संख्या हर में लिखित शून्यों की संख्या से कम हो तो अंश के बाईं ओर में जितने अङ्क कम हो उतने ही शून्य बढ़ा लो।

T

उदाहरणमाला (१४)

निम्न लिखित भिन्न राशियों को दशमलव रूप में परिणत करो—

(१) $\frac{४}{१०}$ (२) $३\frac{१}{१००}$ (३) $\frac{७}{१००}$ (४) $\frac{२}{१०}+\frac{३}{१०००}$

(५) $\frac{६}{१००००}$ (६) $\frac{९}{१००००००}$ (७) $११+\frac{५}{१००}+\frac{६}{१०००००}$

(८) $\frac{१}{१००}+\frac{४}{१०००}+\frac{५}{१००००}$ (९) $१००+\frac{४}{१०}+\frac{३}{१०००}$

(१०) $\frac{६०}{१००}$ (११) $\frac{१२०}{१०}$ (१२) $\frac{३०}{१०००}$ (१३) $\frac{१२३४५}{१००००}$

(१४) $\frac{९००}{१००००}$ (१५) $\frac{१२५}{१००००}$

निम्न लिखित दशमलव भिन्न को संयुक्त भिन्न के रूप में लाओ—

(१) ३·६ (२) ८·२३ (३) ४·१२४ (४) २·१५
(५) ६·२२५ (६) ३·०३ (७) १९·२२५६ (८) ६·०००५
(९) १·२२३४५ (१०) १२५·०२३४५६

दशमलव भिन्न का संकलन

उदाहरण (१)—२५·२०५, २०·१२५ और ·२३४५ को जोड़ो—

क्रिया:—

२५· २०५, तथा २०·१२५ और · २३४५ को जोड़ना है।

= २५ · २०५
= २० · १२५
= · २३४५

= ४५ · ५६४५

T

∴ इस लिए ४५ पैंतालीस दशम·लव, पाँच, छ, चार, पाँच यह उत्तर योगफल का हुआ।

नोट—दशमलव भिन्न के योग तथा अन्तर में इस बात का बालकों को पूरा ध्यान रखना चाहिये, कि दशम-लव के चिह्न सब भिन्न दशम-लव संख्याओं के एक ही ओर यानी एक खड़ी पंक्ति में ही रहने चाहिये। तथा-दशम-लव की पूर्ण संख्या भी ईकाई दहाई के क्रम से ऊपर नीचे रखनी चाहिये। दशम-लव के आगे की संख्या भी क्रम से एक ही पंक्ति में लिखी जाये तब योग तथा अन्तर करना चाहिये। इससे गणित की स्पष्टता रहती है।

दशमलव भिन्न को योग तथा अन्तर सामान्य भिन्न बना कर लघुतम समापवर्त्य निकाल कर भी किया जा सकता है। परन्तु उसकी अपेक्षा उपरोक्त क्रिया में ही लाघवता है। इस लिये पूर्ण राशियों के समान ही योग तथा अन्तर करने में सुगमता रहेगी। यहाँ योगफल में भी दशमलव का विन्दु दशमलवके चिह्नके ठीक नीचे ही रहना चाहिये।

उदाहरणमाला नं० (१५)

निम्नलिखित दशमलव भिन्नों का योग करो—

(१) ३·१३४७ १२·०२३५, ·१२३४५
(२) ३९·००२३, २५६, ३०·५६७
(३) ७००+४२·२०२+५०·०१२+·३४५६
(४) ८२५+५०·१२३+१२५·२२३ २
(५) ३२५+८·२३३४+८२·२३४५

दशमलव का व्यवकलन—

उदाहरण नं० (१)

४·६८५ को १६·२४५ में से घटाना है।

क्रियाः—

= १ ६ · २ ४ ५
= ४ · ६ ८ ५
= ११ · ५ ६ ० = अन्तर हुआ

नोट—दशमलव भिन्न का अन्तर पूर्ण राशि के अन्तर के समान ही होता है । केवल विशेषता इतनी ही रहती है, कि दशमलव का चिह्न एक तरफ़ ही आना चाहिये । जैसा उपरोक्त उदाहरण में स्पष्ट है। इसमें भी वियोज्य संख्या में यदि वियोजक संख्या का अन्तर पूरा न घटे तो बाँई ओर की संख्या में १० दश अधिक मानकर क्रिया करनी चाहिये ।

उदाहरणमाला नं० (१६)

(१) १०० · ३२४ को २३४ · ५६७ में घटाओ ।
(२) १०२ · ३४५ को ५६७२५ · ३२५ में से घटाओ ।
(३) ७ · ३२२५६ को २८३४ · ४५६ में घटाओ ।
(४) ८७२५ · २३४५ को ३४५६७८ · २५६७ में से घटाओ ।
(५) · ९४५६ को ३ · २५६७ में घटाओ ।
(६) ३२ · २३४५६७ में ८ दशमलव २ को घटाओ ।

धन तथा ऋण के मिश्रित उदाहरण ।

(१) ३२ · २४५ + ७८ · २५६ — · ००२३
(२) ७०० — · ००१२ — · ७०७५६ + १२ · २३
(३) ३ · १४१५६ + २०४ · २३४ — २ · ००३
(४) २ · ३४५ — · ०२५ — (३ · १२५ + ३ · ५६७ - २ · ५)
(५) २००—(· ७८६ + ३ · ६५४०२ — ३ · ५६७ — २ · ५)
(६) ३०५ + (८२५ · २५ — ३४ · २५६ + २ · ५६)

दशमलव भिन्न का गुणन—

दशमलव भिन्न के गुणन में साधारण रूपके गुणन की भाँति क्रिया करनी चाहिये। दोनों गुण्य, अथवा गुणकाङ्कों में जितने दशमलव अङ्क हों गुणनफल में उतने ही अङ्कों को गिनकर उनके बाईं ओर दशमलव का चिह्न बना देना चाहिये। यदि गुणन फल में उतने अङ्क न हों जितने दोनों उत्पादकों में दशमलव के अङ्क है तो बाँईं ओर शून्य बढ़ाकर अंक संख्या पूरी करनी चाहिये।

जैसे उदाहरण (१)
१२·२३५ को २·५ दो दशमलव ५ से गुणा करना है।
(२) ·००१२ को २१ से गुणा करना है।—

उदाहरण—नं० (१) १२·२३५ गुण्य; २·५ गुणक,

क्रिया:—

```
  १२ · २३५ = गुण्य
   २ · ५   = गुणक
 ─────────────
   ६ ११७५
 २ ४ ४ ७ ०
 ─────────────
 ३ ०·५ ८ ७ ५ = गुणनफल
```

नोट—यहाँ गुणनफल में गुण्य गुणक के तुल्य पाँच अङ्क गिन कर दशमलव का चिह्न दिया गया है। इस लिये गुणन फल तीस दशमलव, पाँच, आठ, सात, पाँच, यह हुआ।

उदाहरण—नं० (२)

```
 ·० ० १ २ = गुण्य
     २ १   = गुणक
 ─────────────
   ० ० १ २
 ० ० २ ४
 ─────────────
 ·० २ ५ २  गुणन फल
```

T

नोट—यहाँ द्वितीय उदाहरण में भी गुणन फल में गुण्य के दशमलव के चार अङ्क है। उनके तुल्य अङ्क गिनने में तीन ही अङ्क पूरे होते हैं। इसलिये तीनों अङ्कों के बाँई ओर एक शून्य और बढ़ा कर दशमलव का चिह्न रखा गया है। गुणक में तो २१ पूर्णाङ्क ही है इसलिये गुण्य के ही दशमलव अङ्क के समान अङ्क गुणनफल में गिने। इस विषय में इस बात का भी पूरा ध्यान रखना चाहिये कि दशमलव भिन्न को सामान्य भिन्न बना कर गुण्य, तथा गुणक की सामान्य भिन्न को भिन्न गुणन की रीति से गुणाकर के गुणनफल की सामान्य भिन्न को दशमलव भिन्न बना कर उत्तर दिया जा सकता है। परन्तु साधारण भिन्न बना कर गुणन करने की रीति की अपेक्षा उपरोक्त नियम से गुणन करना ही सुगम है।

उदाहरणमाला (१७)

गुणा करो।

(१) २४· २ को ३· २४ से

(२) ६७· २५ को २· ३१ से

(३) ९००· २३४ को २· ५०१ से

(४) ५· १२३४ को २२०· २४ से

(५) ४०३· २५६ को ·०००५ से

(६) ४६· २४५६ को ·२३४५ से

(७) २८७· ५६७ को ५२५· १ से

(८) २· २३ × ५· २३ × ६· २२

(९) ·२५१ × २· ३४ × ४· ०४५

(१०) ·५ × ००५ × ·०५

दशम-लव भिन्न का भाग—

नियम—दशमलव भिन्न का भागहार पूर्णाङ्क संख्याओं की तरह से

T

ही होता है। वहाँ इस बात का ध्यान रखना चाहिये कि भागफल में उसी समय दशमलव विन्दु रख देना चाहिये। जब कि पूर्ण राशि का भाग समाप्त हो जाय। यदि भाग की क्रिया में भाज्याङ्कों की समाप्ति हो जाय तो आगे क्रिया करने के लिये शून्य उतार कर भाग देना चाहिये। जैसे—

उदाहरण—(१) ८०८·९ भाज्य में २५ भाजक का भाग देना है।

क्रिया:—

```
भाजक      भाज्य         लब्ध
२५ ) ८०८·९ ( ३२·३५६
     ७५
     ——
      ५८
      ५०
      ——
       ८९
       ७५
       ——
       १४०
       १२५
       ———
        १५०
        १५०
        ———
         ×
```

नोट—यहाँ उपरोक्त उदाहरण में स्पष्ट है कि पूर्णाङ्क संख्या की भाग क्रिया समाप्त होने पर ही दशम-लव का चिह्न लगा दिया गया है। तथा भाज्यगत अङ्कों की समाप्ति होने पर अङ्क शेष रहने से शून्य उतार कर क्रिया की गई है। यदि पूर्ण लब्धि दशमलव के कई अङ्क बढ़ जाने पर भी न आवे, यानी शेष अङ्क रहते चले जाँय तो ४ या ५ स्थान तक क्रिया करनी चाहिये। दशमलव अङ्कों की इष्ट संख्या की पूर्ति का ध्यान भी रखना चाहिये।

T

उदाहरण नं० (२) .०३४ में ६ का भाग देना है।

क्रियाः—

नोट—उपरोक्त उदाहरण में भाजक पूर्णाङ्क है, भाज्य दशमलव में है। यहाँ भाग देने में साधारण भाग की रीति के अनुसार दशमलव के चिह्न से आगे भाग दिया। इस प्रकार करने से भाज्याङ्कों की समाप्ति पर शून्य उतारना आरम्भ किया। दो स्थान तक उतारा बार बार एक ही अंक लब्धि में आना आरम्भ हो गया। दो अंक एक तरह के देख कर क्रिया समाप्त कर देनी चाहिए। इस लिये दशमलव शून्य, शून्य, पाँच, छ, छ इत्यादि लिख कर भजनफल का उत्तर यह हुआ, यह दिखला देना चाहिये।

उदाहरण नं० (३)

१२.९६ भाज्य है १०.८ यह भाजक है। यहाँ लब्धि क्या होगी?

क्रियाः— १२·९६ ÷ १०·८

भाजक १०८) भाज्य १२९·६ (लब्धि १·२
१०८
———
२१६
२१६
———
×

∴ १ दशमलव, दो, यह उत्तर हुआ ।

नोट—ऐसे प्रश्नों में इस नियम का पूरी तौर से ध्यान रखना चाहिये कि भाज्य, तथा भाजक को किसी समान अङ्क से गुणा करने से जिस प्रकार कोई अन्तर नहीं पड़ता है, उसी प्रकार भाज्य और भाजक में दशमलव विन्दु को दाहिनी ओर समान स्थान हटाकर लिखने से भी कोई अन्तर नहीं होता है, इस नियम की दृष्टि से ही उपरोक्त उदाहरण में भाजक के दश के आगे के दशमलव चिह्न को एक स्थान बढ़ाने से १०८ संख्या पूर्ण ही भाजक की बन जाती है। उतने तुल्य भाज्य में भी एक स्थान बढ़ा कर दशमलव का चिह्न नौ के अङ्क के आगे लिखा। फिर पूर्वोक्त नियमानुसार भाग दिया, लब्धि पूर्ण आई। इस लिये भाजक को पूर्ण संख्यक बनाने के लिये जितने स्थान दशमलव का चिह्न बढ़ाया जावे उतने ही स्थान भाज्य में बढ़ाकर क्रिया करनी चाहिये। दशमलव भिन्न को सामान्य भिन्न बनाकर भी भाग दिया जा सकता है। परन्तु उपरोक्त नियम ही सरल है।

उदाहरणमाला (१८)

(१) ४५७·७ ÷ २३०
(२) ·०६२२७ ÷ १३००
(३) ·०४००९ ÷ १५२५ ।

(४) ४३१ · ३७६ को ८१७ से भाग दो।

(५) · ००२८१ को ४७५० से भाग दो।

(पांच दशमलव अङ्कों तक भाग निकालो।

(१) १९७ को ७८ से (२) · ००८९ ÷ ३२

(३) · ०४१३२६ को १०१ से भाग दो।

(४) · ४१२१५ को १०१ से भाग दो।

(५) ३५६ · ५ को ८२२ से भाग दो।

(छ दशमलव अङ्क तक भाग निकालो)

(६) ४ · १२३ को २ से भाग दो।

(७) ३ · २२६ को ८ से भाग दो।

(८) ३६ · ७८ को १६ से भाग दो।

(९) · ०४३२१ को ८० से भाग दो।

(१०) ३ · ७३४ को ९ से भाग दो।

वर्ग-क्रिया

परिभाषा—किसी अंक को उसी से गुणा करने से जो गुणनफल होता है वह उस अंक का 'वर्ग' कहलाता है। जैसे ५ संख्या का वर्ग करना है तो ५×५ =२५ 'यह पाँच संख्या का वर्ग हुआ।

"समद्विघातः कृतिरुच्यतेऽथ
स्थाप्योऽन्त्यवर्गो द्विगुणान्त्यनिघ्ना।
स्वस्वोपरिष्टाच्च तथाऽपरेऽङ्का-
स्त्यक्त्वाऽन्त्यमुत्सार्य पुनश्च राशिम्।–(लीलावती)

यदि संख्या जिसका वर्ग करना है दो से अधिक अंकों की हो तो पहिले बायें हाथ के अंक का वर्ग लिखो, फिर शेष पास वाले अंक के दूने से उस अंक को (जिसका वर्ग अभी लिख चुके हैं) गुणा करके,

T

एक संख्या दाहिनी ओर आगे बढ़ा कर लिखो। फिर इस अन्तिम अंक का वर्ग भी एक संख्या बढ़ा कर लिखो। इन सब को जोड़ो। इनका योगफल उत्तर होगा, वही उक्त संख्या का वर्ग है।

यदि संख्या जिस का वर्ग करना है दो से अधिक अंकों की हो तो पहिले बाँये हाथ के दो अंकों से बनी हुई संख्या का वर्ग करो और उसको एक ही अंक मान कर, शेष अंकों के लिये पूर्वोक्त क्रिया का प्रयोग करना चाहिये।

उदाहरण—(१) ६ का वर्ग करना है।

$$=(६)^2=३६ \text{ उत्तर}$$

उदाहरण—(२) १४ का वर्ग करो।

$$=(१४)^2=$$

पहिले १ का वर्ग किया = १

शेष ४ है, सो ४ के दूने ८ से एक को गुणा किया, गुणनफल ८ हुआ सो ८ एक स्थान दाहिनी ओर बढ़ा कर नीचे लिखा। फिर अन्त्यांक ४ का वर्ग १६ एक स्थान बढ़ा कर लिखा, सब को जोड़ने से १९६ यह हुआ।

```
1
 8
 16
---
196
```

∴ यह १४ का वर्ग हुआ।

उदाहरण (३) = २९७ का वर्ग बताओ।

२९७ में दो से अधिक अंक हैं इस लिये २९ की एक संख्या मानी। उसका वर्ग पूर्वोक्त रीति से किया।

$$(२९)^2 \quad (२)^2 = ४$$
$$२\times२\times९ = ३६$$
$$(९)^2 = ८१$$
$$= ८४१$$

शेष अंक ७ के दूने १४ से २९ को गुणा करके गुणनफल ४०६ एक स्थान दाहिनी ओर बढ़ाकर रखे और अन्त में ७ का वर्ग भी एक स्थान बढ़ाकर लिखा सबको जोड़ने से योगफल ८८२०९ हुआ। यही २०७ का वर्ग हुआ।

$$= ८४१$$
$$= \quad ४०६$$
$$= \quad\quad ४९$$
$$\overline{८८२०९}$$

इस लिये = ८८२०९ यह वर्ग हुआ। ∴ उत्तर

उदाहरण—(४) ५१२ का वर्ग क्या होगा?

$$\because ५१२, \text{ में पहिले } (५)^२ = २५$$
$$\therefore २ \times ५ \times १ = १०$$
$$(१)^२ = १$$

$$\therefore (५१२)^२ \quad (५१२^२) = \begin{cases} (५१)^२ = २६०१ \\ २ \times ५१ \times २ = २०४ \\ (२)^२ = ४ \end{cases}$$
$$\overline{२६२१४४}$$

∴ २६२१४४ वर्ग हुआ उत्तर।

उदाहरण (५) १०००५ का वर्ग करो।

न्यासः— पहिले १० का वर्ग किया $(१०)^२ = १००$

$$(१०)^२ = १००$$
$$\text{फिर } १०० \text{ का वर्ग} = २ \times १० \times ० = ००$$
$$०^२ = ०$$
$$\overline{१०००००}$$

T

फिर $(१०००)^२$

$(१०००)^२ =$ १ ० ० ० ०

$२ \times १०० \times ० =$ ०

$(०)^२ =$ ०

---

१ ० ० ० ० ० ०

तब $१०००५^२ =$

$(१००००)^२ =$ १ ० ० ० ० ० ०

$२ \times १००० \times ५ =$ १ ० ० ० ०

$(५)^२ =$ २ ५

---

१ ० ० १ ० ० ० २ ५

वर्ग हुआ— उत्तर

वर्ग करने की दूसरी रीति।

खण्डद्वयस्याभिहतिर्द्विनिघ्नी तत्खण्डवर्गैक्ययुताकृतिर्वा ।

(भास्कराचार्य)

जिस अंक का वर्ग करना हो उसके दो योग खण्ड करके दोनों के वर्गों में उन्हीं खण्डों के परस्पर गुणनफल की दूनी संख्या को जोड़ो उत्तर होगा।

योग खण्ड—उन खण्डों को कहते हैं जिनका योग उस संख्या के बराबर हो जिसके वे खण्ड हैं।

उदाहरण (१) १४ का वर्ग करो।

न्यास:—१४ के दो खण्ड ९ और ५ किये। ये ९,५ दोनों खण्ड योग खण्ड है।

T

$$\therefore (९)^2 = ८१$$

$$\therefore (५)^2 = २५$$

$$९ \times ५ \times २ = ९०$$

१९६

∴ इसलिये १४ का वर्ग = १९६ हुआ।

इस प्रकार योगखण्डों से वर्ग आता है। वर्ग लाने के और भी प्रकार हैं लाघव के लिये ये ही प्रकार पर्याप्त हैं।

वर्गमूल के विषय का निरूपण।

अपने वर्ग की वह संख्या जिसका अपने तुल्य परस्पर घात वर्ग के समान होता है 'वर्गमूल' कहलाती है। जैसे ९ का वर्गमूल =३ है, १६ का वर्गमूल =४ है, ३६ का वर्गमूल ६।

किसी संख्या का वर्ग मूल √ इस चिह्न द्वारा प्रकट किया जाता है जो कि संख्या के पूर्व में रखा जाता है। जैसे √६४ इसका वर्ग मूल = ८ है। यह बतलाता है।

वर्ग मूलनिकालने की दो रीतियाँ हैं-एक प्राचीन रीति और दूसरी नवीन रीति।

(प्राचीन रीति)

"त्यक्त्वान्त्याद्विषमात्कृतिं द्विगुणयेन्मूलं समे तद्धृते
त्यक्त्वा लब्धिकृतिं तदाद्यविषमाल्लब्धं द्विनिघ्नं न्यसेत्।
पंक्त्यां पंक्तिहृते समेऽन्यविषमात्त्यक्त्वाप्तवर्गंफलम्
पंक्त्या तद्विगुणं न्यसेदिति मुहुः पंक्तेर्दलं स्यात्पदम्।

भास्कराचार्य।

T

रीति—वर्ग संख्या पर पहिले, दाहिने हाथ से, सम, विषम, के चिह्न लगाओ। सम का चिह्न = — यह है। विषम का चिह्न यह है | यह है। सबसे पहिले दाहिने हाथके अंक पर विषम चिह्न लगाकर बायें हाथ की ओर क्रम से विषम सम—फिर विषम। फिर सम इस प्रकार चिह्न तब तक लगाते जाओ जब तक सम्पूर्ण संख्या के अंक समाप्त न हों।

फिर बाँयें हाथके विषममें से जिस अंकका वर्ग घटै घटाओ। और जिसका वर्ग घटाया है उस अंक को दूना कर के एक जगह रखो, उसको पंक्ति कहते हैं। घटाने से जो शेष रहा उसके आगे ऊपर में से आगे का सम अंक उतारा। फिर उसमें पंक्ति का भाग दिया। शेष जो बचे उसके आगे फिर ऊपर से आगे का विषम अंक उतार कर लब्धि के वर्ग को घटाया। फिर इस लब्धि को दूना करके पहिली पंक्ति के नीचे दाहिनी ओर, एक स्थान बढ़ा कर रक्खा। और जोड़ा, फिर शेष पर आगे का सम अंक उतार कर इस नई पंक्ति से जो जोड़ कर आई है, भाग दिया और शेष पर आगे के विषम अंक को उतार कर उसमें से लब्धि का वर्ग घटाया—और लब्धि को दूना करके पंक्ति के नीचे एक स्थान दाहिनी ओर बढ़ा कर लिखा और जोड़ा। इसी प्रकार अन्त तक करते जाओ। और अन्तिम पंक्ति का आधा करो वही अभीष्ट वर्ग मूल होगा।

उदाहरण— ६२५ का वर्ग मूल निकालना है।

क्रिया— $\sqrt{६२५}$ = ६ २ ५ पंक्ति.

पहिले सम विषम चिह्न लगाये — ४.

फिर अन्त्य विषम ६ में २ का — | — | क.

वर्ग घटता है सो घटाया २ — ६ २ ५

(२) २ = — ४

शेष रहे दो, इसके आगे का — ४ | २२

— | २०

एक अंक उतारा सम का। फिर २ — २५

का दूना ४ पंक्ति में रखा। फिर ४ — २५

का भाग दिया लब्धि मिले ५, — ×

T

शेष रहे २, इस पर आगे का विषमांक ५ उतारा, २५ हुआ इसमें ५ का वर्ग घटाया, शेष रहा ० शून्य । अब ५ का दूना १० पंक्ति में ४ नीचे दाहिनी ओर एक स्थान बढ़ा कर जोड़ा—तो ५० हुए । फिर ५० का आधा किया = २५ हुआ । यह वर्ग मूल हुआ ।

उदाहरण (२)—८८२०९ का वर्ग मूल निकालो ।

न्यासः —$\sqrt{८८२०९}$

पहिले ९ से आदि तक सम्पूर्ण अङ्कों पर सम विषम का चिह्न लगाया । फिर—अन्त्यविषम ८ में से २ का वर्ग घटाया शेष रहे ४, और २ मूलराशि को दूना करके ४ को पंक्ति में रखा, फिर शेष के आगे अगला सम अङ्क ८ को रखा, ४८ हुए । पंक्ति ४ का भाग दिया, ९ लब्धि आई, ९ का दूना पंक्ति में दाईं ओर एक स्थान बढ़ाकर रखा । योग ५८ हुआ । ९ का वर्ग विषम-संख्या में से घटाया । शेष रहा ४१, इसके आगे ० सम अङ्क उतारा । पंक्ति ५८ से भाग दिया । लब्धि ७ हुई इसका दूना करके पंक्ति में दाहिनी ओर एक अङ्क बढ़ाकर रखा, जोड़ दिया, योग फल ५९४ हुआ । इधर नीचे ९ विषम अङ्क शेष ४ के आगे उतारा । फिर ७ का वर्ग घटाया शेष कुछ नहीं बचा । इधर पंक्ति ५९४ का आधा २९७ यह वर्गमूल हुआ ।

पंक्ति
४
१८

५८
१४

५९४

| — | — |
८ ८ २ ० ९
(२)² = ४
४) ४ ८ (९
३ ६
---
१ २ २
(९)² = ८ १
५८) ४१० (७
४०६

४९
(७)² = ४९

×

५९४ ÷ २ = २९७ वर्गमूल हुआ ।

यही = २९७ उत्तर है ।

५ T

नई प्रचलित रीति नं० (२)

जिस संख्या का वर्गमूल निकालना हो पहिले ईकाई के अङ्क से आरम्भ करके प्रत्येक तीसरे अङ्क पर विन्दु लगाते चले जाओ। इस प्रकार सम्पूर्ण संख्या दो दो-अङ्कों के अंशों में बँट जायगी। फिर बाँयी ओर के अंश में से जितने का वर्ग घटे घटाओ, और शेष पर अगला अंश, जो कि दो दो अङ्कों का आगे है, उतार कर उसे भाज्य मान कर, जिसका वर्ग घटाया है उस संख्या की दूनी संख्या को भाजक मानकर भाग दो। लब्धि को पहिले अङ्क के आगे जिसका वर्ग घटाया है रखो। फिर वहीं लब्धि भाजक के भी आगे लिखो। फिर इस नये भाजक को इसी पूर्व लब्धि से गुणा करके गुणनफल को भाज्य में से घटाओ। फिर अगले अंश को शेष के आगे उतार कर पूर्व क्रिया आखिर तक की लब्धि-वर्गमूल होगी।

उदाहरण (१) नई प्रचलित रीति से ५७६ का वर्गमूल निकालो।

```
                पंक्ति
                २  ४
             .     .
       २)  ५  ७  ६  (२४
           ४
     ४४)   १  ७  ६
           १  ७  ६
           -------
              ×
```

पहिले विन्दु लगाकर संख्या को दो अंशों में बाँटा। फिर पहले अंश ५ में देखा कितने का वर्ग घटता है। ज्ञात हुआ २ का वर्ग घट रहा है। शेष बचे १, फिर इसके आगे अगला अंश ७६ को उतारा। २ को ऊपर की पंक्ति में रखा, फिर २ का दूना ४ को नया भाजक माना फिर भाग दिया नई पंक्ति में लब्धि ४ हुई यह ४ ऊपर पंक्ति में भी दो के आगे रखा। नीचे भी ४ के साथ आगे रखा। फिर ऊपर के ४ से ४४ को गुणा करके घटाया, पूरा बँटा। ऊपर पंक्ति की २४ संख्या ही वर्गमूल हुई।

उदाहरण नं० (२) नई प्रचलित रीति से ५६२५ का वर्गमूल निकालो—

न्यासः—

यहाँ भी क्रम से ईकाई के स्थान से एक एक अङ्क छोड़कर बिन्दु लगाये। अर्थात् संख्या को अंशों में बाँटा। फिर प्रथम अंश में ७ का वर्ग घटता है सो घटाया। शेष बचे ७, फिर ७ के आगे २५ का अंश यानी 'जोड़ा' उतारा तो ७२५ यह संख्या नई भाज्य बनी। फिर भाजक बनाने के लिये ७ का दूना करके

```
          ७  ५  पंक्ति
        ------
          .   .
   ७)  ५ ६ २ ५
       ४ ९
      ------
१४५)     ७ २ ५
         ७ २ ५
      ------
           ×
```

१४ को भाजक माना और भाग दिया। लब्धि आई = ५ पुनः ५, को ऊपर भी पंक्ति में ७ के आगे रक्खा तथा १४ भाजक के आगे भी रखा। फिर १४५ इस नये-भाजक को पंक्ति में रखे हुए ५ से गुणा करके जो ७२५ संख्या बनी इसको उपरोक्त ७२५ भाज्य में से घटाया। भाज्य पूरा घट गया। इसलिए ७५ यह उपरोक्त संख्या का वर्गमूल हुआ—

इसलिये $\sqrt{५६२५}$ इस संख्या का वर्गमूल = ७५ यह हुआ।

उदाहरण नं० (३)

नई प्रचलित रीति से ६४६४१६ का वर्गमूल निकालो—

न्यासः—यहाँ भी ईकाई से एक एक स्थान छोड़ कर बिन्दु लगाये। इस प्रकार बिन्दु लगाने से संख्या अंशों में बँट गई। फिर बाँयीं ओर के अन्तिम अंश में अर्थात् ६४ में ८ का वर्ग घटा, सो घटाया—शेष कुछ नहीं रहा। ८ संख्या को ऊपर पंक्ति में रखा। फिर नीचे दूसरा अंश ६४ उतारा

```
          पंक्ति—
          ८  ०  ४
       ----------
          .   .   .
    ८)  ६ ४ ६ ४ १ ६
        ६ ४
      ----------
१६०४)      ६ ४ १ ६
           ६ ४ १ ६
      ----------
              ×
```

T

तथा उसको भाज्य माना। फिर ८ का दूना करके भी भाजक लिखा तथा भाग दिया। क्रिया नहीं चलती, इसलिये लब्धि शून्य मानी, शून्य को ऊपर भी पंक्ति में लिखा। फिर नीचे आगे का अंश १६ उतारा। इसको फिर भाज्य माना। ऊपर पंक्ति की ८० संख्या का दूना १६० करके भाग दिया। लब्धि आई = ४। फिर ४ को ऊपर भी पंक्ति में लिखा तथा नीचे भी भाजक के आगे लिखा। फिर ४ से नये भाजक १६०४ को गुणा करके भाज्य में घटाया तो ६४१६ ये पूरे घट गये। अतः ८०४ यह ही उपरोक्त संख्या का वर्गमूल हुआ। इस प्रकार प्रत्येक वर्गात्मक संख्या का वर्गमूल बड़ी आसानी से निकल आता है। यह वर्गमूल लाने की सुगम रीति है।

उदाहरणमाला (१९)

निम्न लिखित संख्याओं का वर्गमूल निकालो—

(१) ४१२०९, ४९२८४, १८२२५
२७२२५, ५४७५६, ४९२८४

(२) ८२२६४९००, ३२२६६९.४४१६

(३) किसी धनी ने गरीबों को कुछ धन दिया। प्रत्येक गरीब को उतना धन दिया जितने गरीब थे। यदि उसके कुल धन का प्रमाण २८१९०४१ हो तो बताओ गरीबों की संख्या क्या है ?

(४) वह कौन सी सबसे छोटी संख्या है जिसको ४२३० में से घटाने से शेष पूर्ण वर्ग रह जाय।

(५) एक संख्या के दो भाग किये गये और उस संख्या तथा प्रत्येक खण्ड के गुणनफल को जोड़ा गया तो योग १५२७६९६ यह हुआ तो बताओ वह कौन संख्या है।

भिन्न राशि के वर्ग करने की विधिः—

"वर्गीकृतीघनविधौ तु घनौ विधेयौ, हारांशयोरथपदे च पदप्रसिद्धयै"

(लीलावती)

भिन्न जाति का वर्ग, घन, अथवा कोई घात निकालना हो, तो हर और अंश दोनों का वर्ग, घन, अथवा अभीष्टघात, करने से उत्तर होगा। मूल निकालने में हर और अंश का वर्गमूल निकालना चाहिये।

उदाहरण नं० (१) $\frac{२}{५}$ इस भिन्न राशि का वर्ग करना है।

क्रियाः— $\left(\frac{२}{५}\right)^२$ = २ अंश है इसका वर्ग $=(२)^२=४$,

५ हर है इसका वर्ग $=(५)^२=२५$

अतएव $=\left(\frac{२}{५}\right)^२=\frac{४}{२५}$ यह उत्तर हुआ

उदाहरण नं० (२)

$\frac{४}{२५}$ इस भिन्न राशि का वर्गमूल निकालना है।

$\frac{४}{२५}$ इस भिन्न संख्या का वर्गमूल अपेक्षित है।

न्यासः—$\sqrt[२]{\frac{४}{२५}}$ = यहाँ भी अंश ४ का वर्गमूल = २ हुआ

हर २५ का वर्गमूल = ५ हुआ

इसलिये $\sqrt[२]{\frac{४}{२५}}=\frac{२}{५}$ यह वर्गमूल हुआ।

$=\frac{२}{५}$ उत्तर।

T

उदाहरणमाला (२०)

निम्न लिखित भिन्नों का वर्ग करो—

(१) $\frac{३}{४}$ (२) $\frac{६}{८}$ (३) $\frac{११}{१४}$ (४) $२\frac{३}{१८}$ (५) $१\frac{२}{३}$

निम्न लिखित भिन्नों के मानों को निकालो।

(६) $\sqrt{\dfrac{\frac{१}{४}+\frac{४}{९}+\frac{२}{३}}{\sqrt{\frac{२}{४}+\frac{४}{९}-\frac{२}{३}}}} \div \left\{\left(\frac{१}{२}\right)^{२}+\sqrt{\frac{१}{४}}\right\}$

(७) $\sqrt{\dfrac{१५२२७५६}{२८१६०४१}}$

त्रैराशिक विषय निरूपण—

त्रैराशिक का विषय परिभाषा रूप कुछ बतलाया गया है। अब उसका स्पष्टीकरण उदाहरणान्तरों से किया जाता है। उस में उपयोगी विषय अनुपात तथा समानुपात की परिभाषा को पहिले लिखा जाता है।

अनुपात—एक राशि का उसी जाति की दूसरी राशि के साथ अनुपात वह कहलाता है, जिस से दूसरी राशि की अपेक्षा पहिली राशि की अधिकता प्रकट की जाय। इस लिये एक राशि का उसी जाति की दूसरी राशि के साथ अनुपात उस भिन्न राशि के द्वारा प्रकट किया जाता है, जिस भिन्न राशि का अंश पहिली राशि की नाप और हर दूसरी राशि की नाप हो, दोनों राशियों का सम्बन्ध एक ही ईकाई के द्वारा प्रकट किया जायेगा। क्योंकि भिन्न तो ईकाई को कुछ हिस्सों में विभक्त करके कुछ हिस्से ग्रहण किये जाने पर ही बनती है। इस लिये दोनों राशियों का सम्बन्ध ईकाई के द्वारा ही प्रकट किया जाता है, जैसे ४) रुपये का ५) रुपये के साथ अनुपात $\frac{४}{५}$ भिन्न से प्रकट किया जाता है।

तथा ४ सेर का १० छटांक के साथ अनुपात $\frac{६४}{१०}$ भिन्न के द्वारा किया जावेगा क्योंकि ४ सेर को छटांक बनाकर अनुपात एक जातीय में दिखलाया जाता है।

अनुपात के मान का सम्बन्ध उस की राशियों की जाति के साथ नहीं रहता है, बल्कि भिन्न २ जाति ही दोनों अनुपात के स्वरूप में होने से भिन्न रूप में वर्णित हो जाता है, इसी लिये भिन्न रूप में परिणत हुए अनुपात के मान को किसी समान अङ्क से गुणा करने या भाग देने से, उन दोनों राशियों में कोई अन्तर नहीं पड़ता है । जिन दोनों राशियों का कि वह अनुपात है।

जैसे ४ : ५, १६ : २०, ६४ : ८० ।

इन अनुपातों में स्पष्ट प्रतीत है, अनुपात का चिह्न दो अङ्कों के बीच में : यह दो विन्दु लगाने से जाहिर किया जाता है ।

जिन दो राशियों या अङ्कों के बीच में यह चिह्न होता है । उन में पहिली राशि को आदि राशि, तथा दूसरी राशि को अन्त राशि भी कहते हैं । दो स्थानों के भिन्न भिन्न अनुपातों को एक जगह करने की क्रिया सम्मिलितानुपात क्रिया कहलाती है ।

सम्मिलितानुपात क्रिया की विधि ।

उदाहरण नं० (१). ३ : ७ और ८ : १०

इन दो अनुपातों को सम्मिलित करना है। अब यहाँ पहिले अनुपात के आदि के अङ्क को द्वितीय अनुपात के अङ्क से गुणा किया ३ × ८ = २४ हुआ । यह तीसरे अनुपात का आदि का अङ्क हुआ । एवं पहिले अनुपात के दूसरे अङ्क ७ को, दूसरे अनुपात के दूसरे अङ्क १० से गुणा क्रिया = १० × ७ = ७० । यह तीसरे अनुपात का दूसरा अङ्क बना । इस लिये २४ : ७० यह तीसरा अनुपात बना ।

अतः जो अनुपात दो अनुपातों के आधार पर बनता है, वह सम्मिलितानुपात कहलाता है।

इस प्रकार क्रिया करने से बहुत से अनुपात बन जाते हैं।

इस प्रकार जब पहिली राशि का दूसरी राशि के साथ अनुपात एवं तीसरी राशि का चौथी राशि के साथ अनुपात समान हो तो वे चारों राशियाँ समानुपाती कहलाती हैं। इस लिये "समानुपात" वह अनुपात है जिस में चार राशियों का सम्बन्ध हो, अर्थात् पहिली राशि का दूसरी राशि से एवं तीसरी राशि का चौथी राशि से सम्बन्ध हो।

जैसे—२ : ५, ४ : १०

ये चारों राशियाँ समानुपाती हैं क्योंकि इनका सम्बन्ध क्रम से ठीक है, समानुपात, अथवा समानानुपात को प्रकट करने के लिये बीच में बराबर का चिह्न देना चाहिये जैसे उक्त उदाहरण में ही, यथा—

२ : ५ = ४ : १० यह है।

इसमें पहली दो राशियाँ सजातीय होनी आवश्यक है तथा दूसरी भी दोनों सजातीय होनी आवश्यक है। चारों राशियों की सजातीयता का कोई बन्धन नहीं है।

"तुल्यसम्बन्धाऽनुपातः समुच्यते।" रेखागणित के इस सिद्धान्त के अनुसार प्रथम द्वितीय का, एवं तृतीय, चतुर्थ का परस्पर सजातीय होना परमावश्यक है, जिससे समानुपातक्रिया, तुल्य सम्बन्ध से ही चले। इसलिये २ : ५ :: ४ : १० यहाँ चार राशियों की निष्पत्ति दिखलाई गई है। इसका आशय यह है, कि २ का ५ के साथ जो सम्बन्ध है वही ४ का १० के साथ सम्बन्ध है।

त्रैराशिक में राशियाँ दो परिभाषाओं से चलती हैं—

(१) समानानुपात परिभाषा, अथवा समानुपात परिभाषा।

(२) सजातीय परिभाषा।

T

(१) समानुपात परिभाषा में चारों राशियाँ समान सम्बन्ध रखती हैं। वे उलट पुलट कर भी समान सम्बन्ध वाली ही रहती हैं, अर्थात् दूसरी का पहिली से जो सम्बन्ध है वही चौथी का तीसरी से इस प्रकार परिवर्तित हो सकती है। परन्तु पहिली, दूसरी का एवं तीसरी, चौथी का सम्बन्ध विच्छेद बिलकुल नहीं होता है, क्योंकि वे समानुपातीय कहलाती हैं।

(२) सजातीय परिभाषा में पहिली का, तीसरी का एवं दूसरी का तथा चौथी का सम्बन्ध परस्पर तुल्य होता है।

जैसे उक्त उदाहरण में ही २ : ४ : : ५ : १०। २ का ४ के सम्बन्ध की निष्पत्ति ५ के १० के सम्बन्ध की निष्पत्ति के समान होता है। यह सजातीय अनुपात कहलाता है।

अब समानुपात परिभाषा, तथा सजातीयानुपात परिभाषा के अनुसार त्रैराशिक में अनुपात दो प्रकार का हुआ—

(१) समानुपात परिभाषा के अनुसार चार राशियाँ जब समानुपाती होती हैं, तो आदि तथा अन्त्य राशियों का गुणनफल मध्य-राशियों के गुणनफल के समान होता है।

जैसे २ : ५ : : ४ : १० ये चार राशियाँ समानुपाती हैं, यहाँ आदि = २, अन्त्य = १० इन का गुणनफल = १० × २ = २० = मध्य राशियों के गुणन फल ५ × ४ = २० के समान हुआ।

$\because$ आदि × अन्त्य = मध्य × मध्य'

$$\therefore \text{आदि} = \frac{\text{मध्य} \times \text{मध्य}'}{\text{अन्त्य}}$$

$$\therefore \text{वा अन्त्य} = \frac{\text{मध्य} \times \text{मध्य}}{\text{आदि}}$$

$$\therefore \text{मध्य} = \frac{\text{आदि} \times \text{अन्त्य}}{\text{मध्य}'}$$

T

$$\therefore \text{मध्य} = \frac{\text{आदि} \times \text{अन्त्य}}{\text{मध्य}}$$

इस लिये चारों राशियों में दो राशियों के गुणनफलों की आपस में समता से एक का ज्ञान आसानी से आ सकता हैं, जैसे ऊपर दिखलाया जा चुका है, उपरोक्त उदाहरण में नीचे की मध्य राशियों में एक को मध्य राशि ,दूसरी को मध्यं=स्वर विशिष्ट मध्य राशि मान कर संकेत दिखलाया है।

(२) सजातीयानुपात परिभाषा के अनुसार पहिली और दूसरी का अनुपात, दूसरी और तीसरी के अनुपात के समान होता है।

इस में दूसरी राशि को पहिलो और तीसरी के मध्य में होने से मध्यसमानुपाती बोलते हैं। इसी प्रकार तीसरी राशि को पहिली और दूसरी राशि का अन्यसमानुपाती कहते हैं।

जैसे ३, ६ और १२ ये परस्पर सजातीयानुपाती हैं। क्योंकि ३ : ६ = ६ : १२ सम्बन्ध है, इस लिये ६ मध्यसमानुपाती ३ और १२ का है १२ यह अन्यसमानुपाती या तीसरा समानुपाती ३ और ६ का है इस प्रकार सम्बन्ध सजातीयानुपात में होता है, मध्य समानुपाती अङ्क का वर्ग जिन दो राशियों का वह मध्यसमानुपाती है उन दोनों के गुणनफल के समान ही होता है, यह ध्यान रखना चाहिये। जैसे उपरोक्त उदाहरण में ही ६ = मध्यसमानुपातो, इस का वर्ग = (६)^{२} = ३६ = ३ × १२ = मध्यसमानुपाती^{२}। इस लिये मध्यसमानुपाती अङ्क का वर्ग करके देख लेना चाहिये कि यह वर्ग उक्त दोनों राशियों के गुणनफल के समान है या नहीं।

इस में तीन राशियाँ ज्ञात हैं, उन की चौथी राशि समानुपाती निकालनी पड़ती है।

जैसे उपरोक्त उदाहरण में हो ३, ६ और १२ की समानुपाती चौथी राशि निकालनी है।

क्रियाः—३ : ६ = १२ : इष्ट चौथी राशि। इसलिये इस उपरोक्त उदाहरण में स्पष्ट ही विदित है कि, ३ : ६ = १२ : इष्ट संख्या। पहिली तथा दूसरी राशि का सम्बन्ध तीसरी तथा चौथी राशि के सम्बन्ध के तुल्य है। परन्तु पहिली राशि से दूसरी राशि दुगुनी हैं, इसलिये तीसरी राशि से चौथी राशि भी दुगुनी ही होगी तभी सम्बन्ध तुल्य हो सकता है, इसलिये चौथी राशि = १२ × २ = २४ ही हो सकती है। परन्तु इसका आनयन इस प्रकार करना चाहिये।

∵ ३ : ६ = १२ : इष्ट चौथी संख्या

∴ इष्ट चौथी संख्या $= \frac{१२ \times ६^{२}}{३}$

= २४ यह उत्तर हुआ।

यहाँ संस्कृत में ३ इसको 'प्रमाण', अथवा, 'आदि' कहते हैं, ६ यह प्रमाण सम्बन्धि फल होता है। यह फल मध्य में रहता है १२ इसका नाम इच्छा है, अब जो चौथी राशि आवेगी, वह इच्छा-सम्बन्धी फल कहलावेगी। उपरोक्त उदाहरण में स्पष्ट है, कि आद्य-सम्बन्धि फल को इच्छा से गुणा करो, आद्य यानी प्रमाण का भाग दो तो इच्छा सम्बन्धि फल आवेगा।

∵ इष्ट चौथी राशि अथवा इच्छा सं० फ० $= \frac{१२ \times ६}{३}$

∴ ,, ,, ,, ,, = २४

इसलिये

∴ प्रमाणमिच्छा च समानजाती आद्यन्तयोस्तत्फलमन्यजातिः।
मध्येतदिच्छाहतमाद्यहृत्स्थात्स्यादिच्छाफलं व्यस्तविधिर्विलोमे॥
—लीलावती।

भास्कराचार्य्य ने उक्त समानुपातीय राशियों को इस प्रकार कल्पना करके समझाया है। यह पहिले त्रैराशिक परिभाषा प्रकरण में भी हम

T

लिख चुके हैं। वहाँ व्यस्तविधि का प्रयोग कहाँ करना चाहिये, यह भी समझा दिया गया है।

उदाहरण नं० (२)

वह राशि बतलाओ जिसका ४० के साथ वही सम्बन्ध हो जो ३ का ५ के साथ है।

३ : ५ = इष्टसंख्या : ४०

अब यहाँ इस प्रश्न में पहिली, दूसरी, चौथी राशि जानकर तीसरी राशि का ज्ञान करना अपेक्षित है। अतः यहाँ प्रश्न इस प्रकार बनेगा कि ५ राशि का ३ से जो सम्बन्ध है, वह सम्बन्ध ४० का किस राशि से होगा। यहाँ पर ५ यह राशि ही आद्य या प्रमाण कहलावेगी। इस उक्त नियम के अनुसार आद्य से भाग देने के अवसर में ५ का ही भाग दिया जावेगा।

∴ $\frac{\overset{८}{\cancel{४०}} \times ३}{\cancel{५}}$ = इष्टसंख्या

= २४ इष्टसंख्या उत्तर।

उदाहरण नं० (३)

५ और २० इन दो संख्याओं की मध्य समानुपाती कौन संख्या होगी?

इस लिये उक्त नियम के अनुसार—

∵ मध्यानुपाती, अभीष्ट संख्या का वर्ग = २० × ५

∴ इष्ट संख्या वर्ग = २० × ५ = १००

∴ $\sqrt{\text{इष्ट संख्या वर्ग}} = \sqrt{१००}$

∴ इष्ट संख्या = १०

इस लिये ५ और १२ को मध्यसमानुपाती १० संख्या हुई।

उदाहरण नं० (४)

४० सेर दूध में पानी भी मिला हुआ है। दूध तथा पानी का सम्बन्ध ३ : २ का है तो बताओ कितना दूध है और कितना पानी?

न्यासः—यदि दूध तथा पानी का मिश्रित मान ५ हो तो दूध+पानी (३ + २) का भिन्न भिन्न प्रमाण यह है। इस लिये अनुपात =

∵ ५ सेर मिश्रित दूध में पानी = २

∴ ४० सेर में कितना $= \frac{२ \times ४०}{५}$

∴ " = १६ सेर।

एवं ५ सेर मिश्रित मान में दूध ३ = सेर

∴ ४० " $= \frac{३ \times ४०}{५}$

∴ " " " = २४ सेर

∴ ४० सेर मिश्रितमान में २४ : १६ का सम्बन्ध हुआ।

नोट—मिश्रितमान में से सम्बन्ध उक्त नियम से निकालना चाहिये। ईकाई के कायदे से भी निकाला जा सकता है (यह ऊपर का कायदा भी ईकाई के कायदे से सम्बन्ध रखता है।) जो त्रैराशिक परिभाषा में दिखलाया जा चुका है। इस लिये ३ : २ : : २४ : १६ यहाँ ३ : २ की निष्पत्ति २४ : १६ से हुई, यह सिद्ध हुआ। बड़े सम्बन्ध से छोटा सम्बन्ध और छोटे सम्बन्ध से बड़ा सम्बन्ध भी आता है। जैसे उपरोक्त उदाहरण में ही २४ : १६ सरल रूप में अर्थात् छोटे रूप में अनुपात ८ से अपवर्तन देकर ३ : २ का वह अनुपात बन जाता है। इसलिये अनुपात छोटा बड़ा हो सकता है परन्तु उनकी निष्पत्ति बराबर ही रहती है, इसलिये ३ : २ = २४ : १६ ऐसे भी लिखा जाता है।

उदाहरणमाला नं० (२१)

निम्नलिखित अनुपातों को छोटे अनुपातों में लाओ।

(१) २० : ६० (२) ३१ : ६०

(३) १५ : २१ (४) ३६० : १७०

निम्नलिखित अनुपातों को किसी एक बड़े स्वरूप में ही दिखलाओ।

(५) ३ : ४ (६) ८ : १० (७) ४ : १२

(८) ८ : १२ (९) १० : १५

निम्नलिखित प्रश्नों में कौन कौन प्रश्न समानुपाती हैं ?

(१०) ४, : ५ : : १६ : २० (११) २ : ३ : : ६ : ९

(१२) ५, ७, २०, २७ (१३) ८, १०, ११, १२

(१४) ६, १२, १८, ३६ (१५) ३ : ४ : : २४ : ३२

निम्नलिखित प्रश्नों में चौथी समानुपाती राशि निकालो ?—

(१६) ७, ९ तथा ८ (१७) २०, ३०, ६०

(१८) १८, ३०, तथा ३४ (१९) ३८०, ५७०, २०

(२०) यदि क १० रू० कमाता है तो ख ३० रु० और यदि ख १५), कमाता है, तो ग ४५ रू०। तो क, ख, ग इन तीनों की कमाई क्या होगी ?

(२१) वृत्त की परिधि का तथा व्यास का सम्बन्ध ३९२७ : १२५० का है। इस अनुपात से यदि व्यास ५० गज का हो तो परिधि का मान क्या होगा ?

(२२) ५० सेर दूध में दूध और पानी का सम्बन्ध ३ : २ का है तो दूध और पानी अलग अलग बताओ ?

(२३) एक चौकीदार चोर के पीछे दौड़ा। चौकीदार तथा चोर की चाल में ५ : ३ का सम्बन्ध है। यदि चोर चौकीदार से ८० गज आगे हो तो चोर को चौकीदार कितने गज चलने पर पकड़ेगा।

(२४) दो व्यापारियों के धन के प्रमाण का सम्बन्ध ४ : ५ का है।

यदि पहिले व्यापारी का धन १२६०) रुपये हो तो दूसरे व्यापारी का धन बतलाओ।

(२५) दो रेलगाड़ी की चालों में ४० : ३० मील का सम्बन्ध है। यदि कलकत्ते से काशी का अन्तर १००० मील का हो तो पहिली गाड़ी दिन के ६ बजे प्रातः काल कलकत्ते से चली, दूसरी भी उसी समय काशी से चली, तो कब और कहां दोनों मिलेंगी।

त्रैराशिक में तीन दी हुई राशियों को चौथी समानुपाती राशि निकाल कर प्रश्नों को निकालना होता है। यह त्रैराशिक परिभाषा में समझा दिया गया है।

उसमें समानुपात परिभाषा का पूरा ध्यान रखना चाहिये। जैसे

उदाहरण नं० (१)

क एक काम को ६ दिन में करता है, ख उसी काम को १० दिन में करता है तो क और ख को उस काम के करने में कितना समय लगेगा।

क्रियाः—यह त्रैराशिक का प्रश्न है। इसमें १ दिन का काम पहिले दोनों का निकालना चाहिये। यथा—

$\because$ ६ दिन में क = १ एक काम

$\therefore$ १ ,, ,, = $\frac{१}{६}$ काम

एवं $\because$ १० दिन में ख = १ एक काम

$\therefore$ १ ,, ,, = $\frac{१}{१०}$ काम

दोनों का एक एक दिन का काम—

$= \frac{१}{६} + \frac{१}{१०} = \frac{१० + ६}{६०} = \frac{१६}{६०} = \frac{४}{१५}$ कार्य हुआ।

T

पुनः ∵ $\frac{४}{१५}$ कार्य दोनों मिल कर = १ दिन में करते हैं।

∴ १ कुल एक काम कितने में = $\frac{१५}{४}$

∴ ,, ,, ,, = $३\frac{३}{४}$

∴ ,, ,, ,, = $३\frac{३}{४}$ दिन में उत्तर।

नोट—ऊपर के प्रश्न में समानुपात परिभाषा का ध्यान रखते हुए ही अनुपात बैठाया गया है।

जैसे—काम — काम — दिन — दिन

$\frac{४}{१५}$: १ :: १ : उत्तर

इस अनुपात में स्पष्ट है कि जब कार्य्य का $\frac{४}{१५}$ वाँ भाग एक दिन में पूरा होता है तो १ एक कुल कार्य्य अधिक दिन में ही होगा। अब यहाँ चौथी राशि वही होगी जितने दिनों में वह कार्य्य होगा। त्रैराशिक परिभाषा में कहे हुए नियम के अनुसार अर्थात् जब कम यानी न्यून उत्तर अपेक्षित होता है तो अधिक संख्या का भाग लगाना चाहिये। और जब अधिक उत्तर अपेक्षित होता है तो न्यून संख्या का भाग लगता है, इस दृष्टि से यहाँ उपरोक्त प्रश्न में कुल कार्य्य जब अधिक दिनों में सम्पन्न होगा तो कम संख्या $\frac{४}{१५}$ का भाग १ में लगेगा

∴ इस लिये $१ \div \frac{४}{१५} = \frac{१५}{४} = ३\frac{३}{४}$ दिन

यह उत्तर हुआ। इसी प्रकार सब जगह जानना चाहिये।

उदाहरणमाला (२२)

(१) क एक काम को ८ दिन में करता है, ख उस को १० दिन में पूरा

करता है, तथा ग, उस को १२ दिन में पूरा करता है तो तीनों मिल कर कितने दिनों में कार्य्य को पूरा करेंगे।

(२) सुरेन्द्र एक काम को १५ दिन में, देवेन्द्र उसी को २० दिन में, रवीन्द्र उस को १० दिन में करते हैं तो तीनों मिल कर उस काम को कितने दिनों में करेंगे।

(३) क एक काम को १६ दिन में करता है, ख उसको १० दिन में, क और ख ने मिलकर ६ दिन काम किया, ग ने शेष काम को ४ दिन में समाप्त कर लिया तो ग अकेला उसको कितने दिनों में कर लेगा।

(४) क और ख मिल कर एक काम को ८ दिन में कर सकते हैं, ख अकेला उसको १२ दिन में कर सकता है। यदि ख अकेला ४ दिन काम करे, तो क अकेला कितने दिन काम और करे कि वह काम समाप्त होजाय।

(५) एक काम ४० दिन में समाप्त हो जाने को था, कुछ आदमी उसपर लगाये गये और उन्हों ने आधा काम ३० दिन में किया फिर उसपर १६ आदमी और लगाये गये और काम नियत समय पर समाप्त हो गया तो प्रथम बार उसमें कितने आदमी और लगाये गये थे।

(६) क और ख एक खेत को ३$\frac{1}{3}$ दिन में काट सकते हैं, क और ग उसको ४ दिन में और ख और ग उसको ५ दिन में, तो सब मिलकर उसको कितने दिनों में काट लेंगे।

उदाहरण (२)

६३ पल कपूर १०४ निष्क में आता है तो १२$\frac{1}{8}$ पल कितने में आवेगा।

क्रियाः—यहाँ ६३ यह प्रमाण तथा आद्य है, १०४ यह अन्य जाति है यह प्रमाण सम्बन्धिफल है। १२$\frac{१}{४}$ इच्छा है।

$$\because ६३ : १०४ :: १२\frac{१}{४} : \text{उत्तर}$$

$$\therefore \left(१०४ \times १२\frac{१}{४} \right) \div ६३$$

$$\therefore \left(१०४ \times \frac{४९}{४} \right) \div ६३$$

$$\therefore \frac{१०४ \times ४९}{६३ \times ४} = \frac{१८२}{९}$$

$= \frac{१८२}{९} =$ २० निष्क ३ द्रम्म ८ पण ३ काकिणी ११ $\frac{१}{९}$ कौडी। यह उत्तर हुआ

नोट—त्रैराशिक के प्रश्नों में सम्बन्ध जो रहता है उसमें इस सिद्धान्त को अवश्य ध्यान में रखना चाहिये कि आद्य अर्थात् प्रमाण का तथा उत्तर का गुणनफल, प्रमाण सं० फल तथा इच्छा के गुणनफल के समान होता है। इसी सिद्धान्त को लेकर त्रैराशिक में शुद्धि, अशुद्धि का मिलान करना चाहिये। जैसे उपरोक्त उदाहरण में ही

आद्य $= ६३$, उत्तर $= \frac{१८२}{९}$, इच्छा $= \frac{४९}{४}$

प्रमाण सं० फल $= १०४$

$$\therefore \frac{\overset{७}{\cancel{६३}} \times १८२}{\cancel{९}} = १२७४$$

$$\therefore \frac{\overset{२६}{\cancel{१०४}} \times ४९}{\cancel{४}} = १२७४$$

$\therefore$ यह दोनों गुणनफल समान हुए।

T

इस लिये आदि तथा उत्तर का गुणनफल बीच के दोनों मानों के अर्थात् आद्य सम्बन्धि फल तथा इच्छा के गुणनफल के समान होता है, यह सिद्धान्त त्रैराशिक में अवश्य मिलाना चाहिये।

उदाहरण नं० (३)

$\frac{३}{७}$ निष्क में २$\frac{१}{२}$ पल कुङ्कुम मिलता है तो बताओ ९ निष्क में कितना मिलेगा।

न्यासः—यहाँ $\frac{३}{७}$ निष्क प्रमाण, ९ निष्क इच्छा, २$\frac{१}{२}$ पल यह प्रमाण सं० फल है। इष्ट संख्या, प्रमाण सं० फल की जाति की रहेगी, वही उत्तर होगा।

इस लिये— $= \frac{३}{७} : २\frac{१}{२} :: ९ :$ इष्ट उत्तर

$$\text{इष्ट संख्या} = \left(२\frac{१}{२} \times ९ \right) \div \frac{३}{७}$$

$$\text{इष्ट संख्या} = \left(\frac{५}{२} \times \frac{९}{१} \right) \div \frac{३}{७}$$

$$\text{इष्ट संख्या} = \frac{४५}{२} \div \frac{३}{७}$$

$$\text{इष्ट संख्या} = \frac{\cancel{४५}^{१५}}{२} \times \frac{७}{\cancel{३}}$$

यहाँ अन्य जाति तथा इच्छा का गुणा कर के गुणनफल में प्रमाण से भाग देने पर लब्धि अभीष्ट उत्तर होगा।

$$\text{इष्ट संख्या} = \frac{१०५}{२}$$

$$\text{इष्ट संख्या} = ५२\frac{१}{२} \text{ पल कुङ्कुम} \qquad \therefore \text{ उत्तर।}$$

नोट—यहाँ भी बीच की दोनों राशियों का गुणनफल आदि का

संख्या तथा फल के गुणन फल के समान ही है । त्रैराशिक में ऐसा सर्वत्र जानना ।

उदाहरणमाला (२३)

(१) यदि १० हाथ ऊँचे स्तम्भ की छाया २५ हाथ है तो उसी सम्बन्ध से १५० हाथ ऊँचे स्तम्भ की छाया क्या होगी ?

(२) १६ गाड़ियों का किराया ४०) रु० होता है। तो ६ गाड़ियों का क्या भाड़ा होगा ?

(३) ४ घोड़े २००) रू० में मिलते हैं तो ८० घोड़े का मूल्य क्या होगा ?

(४) चार आने में ४८ आम आते हैं, तो १-) में कितने आम आवेंगे ?

(५) १२ अङ्गुल शङ्कु की छाया १६ अङ्गुल है तो दो हस्त शङ्कु की छाया बताओ।

उदाहरण नं० (४)

१००) का १ वर्ष का ब्याज ५) रुपया मिलता है तो १२५०) का ६ वर्ष का ब्याज क्या होगा ?

क्रिया:—

∵ यदि १००) का १ वर्ष का ब्याज = ५)

∴ १) ,, $= \frac{५}{१००}$ रू०

∴ १२५०) ,, $= \frac{१२५० \times ५}{१००}$

∴ ,, ६ वर्ष $= \frac{१२५० \times ५ \times ६}{१००}$

= ३७५) रुपये

इस लिये ३७५) ब्याज हुआ, उत्तर।

T

नोट—ब्याज के प्रश्नों में यह ध्यान रखने की आवश्यकता है कि कुछ रुपया किसी नियत समय के लिये किसी को दिया जाय, तो लेने वाला व्यक्ति जब नियत समय में उस रुपये को लौटाता है, तो कुछ रुपया नियत रुपये से अधिक (नियत समय तक आवश्यक कार्य्य-वश रुपये रखने के मावज़े में) रुपया और मिलाकर देता है। नियत रुपये से अधिक रुपया जो दिया जाता है वह 'ब्याज' कहलाता है। जो निश्चित रकम दी गई थी, जिसका कि वह ब्याज मिला है, 'मूलधन' या असली रकम कहलाती है, जितने समय के लिये दी जाय वह 'काल' या मुद्दत या 'समय' कहलाता है। जो व्यक्ति रुपये देता है वह 'साह' कहलाता है, और जो व्यक्ति रुपया लेता है वह 'असामी' कहलाता है। इस सम्बन्ध के प्रश्न उपरोक्त उदाहरण के अनुसार निकालने चाहिये। इस उपरोक्त नियम में इस बात का भी ध्यान रखना चाहिये कि प्रश्न पलट कर भी आता है, जैसे उपरोक्त उदाहरण में ही १००) का ब्याज १ वर्ष का ५) है तो ३७५) रुपये ब्याज ६ वर्ष में कितने रुपये का होगा। अथवा १२५०) का ३७५) ब्याज कितने समय में होगा। इस प्रकार जैसी प्रश्न की आकांक्षा हो उस के अनुसार उत्तर निकालना चाहिये। तथा जिस विषय का उत्तर निकालना हो उसे अन्त में रखना चाहिये। जिस से अन्त में जो वस्तु रखी गई है उस सम्बन्धी ही उत्तर आवे। चाहे मूल धन सम्बन्धी हो, चाहे ब्याज सम्बन्धी हो, चाहे समय सम्बन्धी हो—यह प्रश्न से ही पता चलेगा। इस प्रकार सब जगह समझना चाहिये।

उदाहरणमाला (२४)

(१) २५०) का २ वर्ष का ५) प्रतिशत ब्याज की दर से ब्याज निकालो।

(२) ८००) का ३½ वर्ष का ४) सैकड़ा सालाना की दर से ब्याज क्या होगा?

(३) ५०) ब्याज ३ वर्ष में १) रू० सालाना ब्याज की दर से कितने मूलधन पर होंगे।

(४) ४२०) मूलधन का ४०) ब्याज ४) फी सैकड़ा सालाना की दर से कितने समय में होगा ?

(५) १५००) रू० का ३) रूपये फी सैकड़ा के हिसाब से १२ साल का ब्याज बताओ ।

पञ्चराशिक विषय निरूपण ।

पञ्च-सप्त-नव-राशिकादिकेऽन्योन्यपक्षनयनं फलच्छिदाम्
संविधाय बहुराशिजे विधे स्वल्पराशिवधभाजिते फलम् – लीलावती

अर्थ—पाँच, सात, नौराशिक आदि में फल और हर को एक दूसरे के पक्ष में लाकर के बहुत राशियों से गुणा करे और थोड़ी राशियों के गुणनफल से भाग दे, लब्धि फल है ।

रीति—दो या अधिक त्रयराशियों की रीति से समान जातियों को शोधो और उसी रीति से आदि वाली राशियों से भाग, मध्य और अन्त वाली राशियों के गुणनफल को दो लब्धि फल होगा ।

उदाहरण (१) हे गणक, एक महीने में १००) का ब्याज ५) हो तो १६) का १ वर्ष में क्या ब्याज होगा ?

मूल धन और ब्याज से काल कहो और काल और ब्याज से मूल-धन बताओ,

पहला त्रैराशिक—१ महीने में ५, तो १२ महीने में कितना, अधिक होगा ।

ऊपर की रीति से १२ और ५ के गुणन में एक का भाग १ | १२
| ५

दूसरा त्रैराशिक—१००) का ब्याजफल ५ है तो १६ का क्या होगा ? कम होगा, अतः १०० का भाग और १६ का गुणन होगा।

भाग वाली राशि एक ओर रक्खो और गुणन वाली दूसरी ओर लिखो।

१	१२
१००	१६

$$फल = \frac{१२ \times १६ \times ५}{१०० \times १} = \frac{४८}{५} = ९\frac{३}{५}$$

दूसरे—मूलधन १६ और ब्याज $\frac{४८}{५}$ है तो काल बताओ ?

प्रथम त्रैराशिक—५ ब्याज है १ महीने का $\frac{४८}{५}$ कितने का ? अधिक

∵ अधिक का गुणा, कम का भाग, ५ का भाग और $\frac{४८}{५}$ का गुणा किये, गुणन वाली एक ओर और भाग वाली राशि दूसरी ओर लिखी—

दूसरा त्रैराशिक-१००) का १ मास का है तो १६) का कितने मास का ?

अधिक मास का होगा।

∴ अधिक से गुणन और कम से भाग

दोनों त्रैराशिकों से यह रूप बना

५	$\frac{४८}{५}$
१६	१००
	१

अतएव $$फल = \frac{४८ \times १०० \times १}{५ \times ५ \times १६} = १२$$

१२ महीने या १ वर्ष,

तीसरे—१२ महीना काल और ब्याज $\frac{४८}{५}$ जानकर मूलधन बताओ ?

T

पहिला त्रैराशिक—५ ब्याज का मूलधन १०० है तो $\frac{४८}{५}$ का क्या होगा ? अधिक—

दूसरा त्रैराशिक—१ महीना है तो मूल १०० है तो १२ महीने में क्या है ? कम, त्रैराशिक रीति से १२ का भाग, १ से गुणन होगा।

∵ रीति के अनुसार लिखने में:—

५	$\frac{४८}{५}$
१२	१००
	१

∴ फल $= \frac{४८ \times १०० \times १}{५ \times ५ \times १२} = १६)$ रू०

उदाहरण नं० (२)

हे मित्र, $१\frac{१}{३}$ महीने में १००) का ब्याज $५\frac{१}{५}$ हो तो $३\frac{१}{५}$ महीने में $६२\frac{१}{२}$ का ब्याज क्या होगा ?

प्रथम त्रैराशिक—$१\frac{१}{३}$ महीने में $५\frac{१}{५}$ तो $३\frac{१}{५}$ में क्या ? अधिक.

∴ ऊपर की रीति से $१\frac{१}{३}$ का भाग और $३\frac{१}{५}$ से गुणन होगा।

द्वितीय त्रैराशिक—१००) का ब्याज $५\frac{१}{५}$ तो $६२\frac{१}{२}$ का क्या ? कम,

∴ १०० का भाग और $६२\frac{१}{२}$ से गुणन होगा।

$१\frac{१}{३}$	$३\frac{१}{५}$
१००	$६२\frac{१}{२}$
	$५\frac{१}{५}$

फल $= ३\frac{१}{५} \times ६२\frac{१}{२} \times ५\frac{१}{५} \div १\frac{१}{३} \div \frac{१००}{१} = \frac{३९}{५}$

$= ७\frac{४}{५}$ ब्याज है

(सप्त राशिका उदाहरण)

३ हाथ चौड़े और ८ हाथ लम्बे रूप में विचित्र पटके दुपट्टे १००) में ८ मिलते है तो ३½ हाथ लम्बा ½ हाथ चौड़ा दुपट्टा कितने में मिलेगा। हे वणिक, यदि वाणिज्य जानते हो तो जल्द बताओ।

प्रथम त्रैराशिक—८ दुपट्टे का दाम १००) है तो १ दुपट्टे का क्या ? कम होगा, ८ का भाग १ का गुणन होगा।

द्वितीय त्रैराशिक—३ हाथ चौड़े के दाम १००) हैं, तो ३½ का क्या ? अधिक होगा, अतः ३ का भाग ३½ का गुणन।

तृतीय त्रैराशिक—८ हाथ लम्बे के दाम १००) हैंतो ½ हाथ लम्बे का क्या, कम ? अतः ८ का भाग ½ का गुणन

	१
८	$३\frac{१}{२}$
३	$\frac{१}{२}$
८	१००

$$फल = १ \times ३\frac{१}{२} \times \frac{१}{२} \times १०० \div ८ \div ३ \div ८$$

$$= १ \times \frac{७}{२} \times \frac{१}{२} \times १०० \times \frac{१}{८} \times \frac{१}{३} \times \frac{१}{८}$$

$$= \frac{१७५}{१९२} रु० = \frac{१७५}{१९२} \times \frac{१६}{१} = १४\frac{७}{१२} \text{ आने}$$

नवराशि का उदाहरण—जो १२ अंगुल मोटे, १६ अंगुल चौड़े और १४ हाथ लम्बे पट १००) में ३० मिलते हैं तो हिसाब कहो कि जो तीनों ओर से चार अंगुल कम हों ऐसे १४ पट्ट कितने में मिलेंगे ?

प्रथम त्रैराशिक १२ अंगुल मोटी के दाम १००) तो ८ का दाम ? कम, अतः १२का भाग।

द्वितीय त्रै०—१६ अंगुल चौड़े का दाम १००) तो १२ अंगुल चौड़े का क्या ? कम, १६ का भाग और १२ का गुणन।

तृतीय त्रै०—१४ हाथ लम्बी का दाम १००) तो १० हाथ का क्या ? कम, १४ का भाग।

चतुर्थ त्रै०—३० पट का दाम १००) तो १४ पट का क्या ? कम, ३० का भाग

१२	८
१६	१२
१४	१०
३०	१४
	१००

$$\text{फल} = \frac{८ \times १२ \times १० \times १४ \times १००}{१२ \times १६ \times १४ \times ३०} = \frac{५०}{३} = १६\frac{२}{३} \text{ रू०}$$

एकादश राशिका उदाहरण—जिस प्रमाण के पट्ट ऊपर के लिखे प्रश्न में पहिले कहे हैं वे दो कोश पर थे, उन के लाने के लिये गाड़ियों का भाड़ा ८ द्रम्म है। और जो कम बाद में कहे हैं उनका भाड़ा क्या होगा यदि वह १२ कोश पर स्थित है।

ऊपर की रीति से पञ्चम त्रैराशिक—२ कोश का भाड़ा ८ हुआ तो १२ कोश का क्या ? अधिक, २ का भाग

१२	८
१६	१२
१४	१०
३०	१४
२	१२
	८

$$\text{फल} = \frac{८ \times १२ \times १० \times १४ \times १२ \times ८}{१२ \times १६ \times १४ \times ३० \times २} = ८ \text{ द्रम्म}$$

यह क्रम प्राचीन है। नवीन गणित में ईकाई के कायदे से तथा

नवीन त्रैराशिक के सम्बन्ध से पञ्च राशिक सप्त राशिक आदि के प्रश्न निकाले जाते हैं। जैसे उपरोक्त उदाहरणमें ही—

यथा १२ अङ्गुल मोटे, १६ अङ्गुल चौड़े और १४ हाथ लम्बे पट्ट १००) में ३० मिलते हैं तो चार अङ्गुल कम प्रमाण के १४ पट्ट कितने रुपये में मिलेंगे।

नवीन रीति से न्यास इस प्रकार होगा।

क्रियाः—

∵ १२अं०मोटे १६अं० चौड़े १४हाथलम्बे ३०पट्ट = १००) में आते हैं

∴ १ ,, १ ,, १ ,, १ ,, $= \dfrac{\text{१} \times \text{१} \times \text{१} \times \text{१००}}{\text{१२} \times \text{१६} \times \text{१४} \times \text{३०}}$

∵ ८ ,, १२ ,, १० ,, १४ ,, $= \dfrac{\text{८} \times \text{१२} \times \text{१०} \times \text{१००} \times \text{१४}}{\text{१२} \times \text{१६} \times \text{१४} \times \text{३०}}$ (५० ; २ ३)

$= \dfrac{\text{५०}}{\text{३}}$ रुपये

$= \text{१६}\dfrac{\text{२}}{\text{३}}$ रुपये, उत्तर।

नोट—इसी प्रकार नव राशिक, सप्त राशिक, पञ्चराशिक आदि के प्रश्नों में प्रश्न की आकांक्षा के अनुसार बीच में एक का मान निकाल कर ईकाई के कायदे से प्रश्न हल करना चाहिये, जैसे उपरोक्त उदाहरण में १ अङ्गुल मोटे, १ अङ्गुल चौड़े, १ हाथ लम्बे, १ पट्ट का दाम पहिले निकाला गया, फिर प्रश्न हल किया गया है। इसी प्रकार सब जगह जानना चाहिये। यहाँ इस बात का ध्यान और रखना चाहिये कि साधारण त्रैराशिक में मान जो निकालना पड़ता है, उस में बीच में एक एक वस्तु का मान जो निकाला गया है, उस की अपेक्षा मान

अधिक वस्तुओं का मान निकालने के लिये मान बढ़ने में ही आवेगी, व्यस्तत्रैराशिक में यानी व्यस्त विधि में ही केवल उलटा जानिये, अर्थात् व्यस्त विधि में ही मान घटा बढ़ा करता है, व्यस्त त्रैराशिक का लक्षण तथा व्यस्त त्रैराशिक कहाँ प्रवृत्त होती है, इस का नियम हमने पहिले समझा दिया है।

उदाहरण माला (२५)

(पञ्च सप्तराशिक के प्रश्न)

(१) ८४ मन अनाज ३) रुपये में १६ कोस पहुँचाया जा सकता है तो बताओ ८) भाड़ा देकर ४० मन अनाज कितनी दूर ले जाया जा सकता है ?

(२) ३२ पशु ८ मन घास १२ दिन में खाते हैं तो ८० पशुओं को इसी व्यवस्था से १५ दिन तक खाने के लिये कितना घास चाहिये। २५ मन

(३) किसी काम को २१ दिन में पूरा करने के लिये ८८ आदमी लगाये गये, परन्तु ४० दिन के पीछे देखा गया कि $\frac{3}{4}$ ही काम हुआ तो बताओ कितने आदमी और बढ़ाये जावें कि काम नियत समय में ही पूरा हो जाय।

(४) किसी किले में १५०० सिपाहियों के लिये १२ सप्ताह का खाने का सामान है, यदि प्रति दिन खर्च फी सिपाही जितना सोचा गया था उस का $\frac{6}{10}$ ही हो तो बताओ वह सामान २० सप्ताह के लिये कितने सिपाहियों के लिये काफी होगा ? १५००

(५) एक जहाज में १२०० आदमी थे उन के पास १७ सप्ताह के लिये खुराक मौजूद था। एक दूसरे जहाज के मुसाफिर उस में आ गये और खुराक १५ सप्ताह में समाप्त होगई, तो बताओ दूसरे जहाज से कितने आदमी और आये थे ? १६०

मिश्रकव्यवहार विधि।

प्र० नं० (१)—१००) का १ महीने का ब्याज ५) है तो १ वर्ष में मूलधन ब्याज सहित १०००) होता है । तो अलग अलग मूलधन तथा ब्याज बताओ।

ऐसे प्रश्नों लिये दो विधि है और वे दोनों त्रैराशिक की विधि है।

(१) भास्कराचार्य की कही हुई विधिः—

"प्रमाणकालेन हतं प्रमाणं विमिश्रकालेन हतं फलं च ।
स्वयोगभक्ते च पृथक् स्थिते ते मिश्राहते मूल-कलान्तरे स्तः ।"

—भास्कराचार्यः

अर्थात्—प्रमाण काल को प्रमाण धन से गुणा करो और मिश्र-काल से फल को गुणन करो। दोनों को अलग २ स्थान पर लिखो। फिर दोनों को मिश्रधन से गुणा करो और गुणन फलों को दोनों के जोड़ से भाग दो तो मूल और ब्याज अलग २ आ जावेंगे। इस लिये न्यासः—

=प्रमाणधन =१०० × प्रमाण काल १ = १००

=एवं फल = ५ × मिश्रकाल १२ = ६०

=दोनों का योग फल =१००+६०

= १६०)

" " "

पुनः १०० × मिश्रधन १००० =१०००००

पुनः ६० × मिश्रधन १००० = ६००००

अतः ∴ प्रथम गुणन फल =१००००० में १६०)

योग का भाग दिया $= \frac{100000}{160} = ६२५)$

∴ द्वितीय गुणनफल में भी योग से भाग दिया $\} = \frac{60000}{160} = ३७५)$

∴ इस लिये मूल धन = ६२५)

∴ कलान्तर अर्थात् ब्याज = ३७५)

∴ उत्तर।

विधिः—नं० (२)

"यद्वेष्टकर्माख्यविधेस्तु मूलं मिश्राच्च्युतं तच्च कलान्तरं स्यात्।"

अर्थात्—इष्टकर्म की विधि से मूलधन पहिले निकाल कर फिर मूलधन को मिश्रधन में घटाने से ब्याज ही शेष रह जाता है।

जैसे इष्ट १०) ही माना।

क्रियाः—

∵ १००) का ६ा १ वर्ष का ब्याज = १० × ६ = ६०

∴ १००) का १ वर्ष का मिश्रधन = १०० + ६० = १६०

पुनरनुपातः—

∵ यदि १६०) मिश्रधन है तो मूलधन = १००)

∴ १ ,, $= \frac{१००}{१६०}$

∴ १०००) ,, $= \frac{१००० \times १००}{१६०}$ (१२५, ५ — कटे हुए अंक)

= ६२५) मूलधन

∵ मिश्रधन — मूलधन = ब्याज

∴ १००० — ६२५ = ३७५)

ब्याज = ३७५)

∴ ६२५) मूलधन, ३७५) ब्याज उत्तर

नोट—इसमें १ भी इष्ट माना जा सकता है। १) का ब्याज १२

महीने का व्याज निकाल कर १) में जोड़ने से मिश्रधन होगा। फिर उसी प्रकार अनुपात करने से भी मूलधन आवेगा, फिर व्याज आ सकता है।

उदाहरणमाला (२६)

(१) ४) मासिक की दर से १२००) मिश्रधन १ वर्ष में कितने रुपयों पर होगा।

(२) २) मासिक प्रतिशत के हिसाब ही ४००) मिश्रधन का मूलधन १ वर्ष में क्या होगा तथा व्याज भी निकालो।

(३) ५) प्रतिशत सालाना की व्यवस्था से १० साल में १२५०) मिश्र-धन कितने रुपयों पर होगा तथा व्याज क्या होगा।

(४) १०) प्रतिशत सालाना की व्यवस्था से १६००) का २०००) रु० मिश्रधन कितने समय में होगा।

(५) तीन आदमियों के पास अलग अलग धन ५१), ६८), ८५) हैं तीनों ने अपने धनों को मिलाकर इकट्ठे धन से व्यापार किया तो मिश्रधन इकट्ठा ही ३००) हुआ तो तीनों का अलग २ लाभ बताओ।

वापी-नलिका-सम्बन्धि प्रश्नों के साधन की विधिः—

भजेच्छिद्रोंऽशैरथ तैर्विमिश्रैः रूपं भजेत्स्यात्परिपूर्तिकालः।

(लीलावती)

अर्थ—इरों को अंशों से भाग देकर लब्धियों को जोड़ लो, फिर योगफल से १ में भाग दो, वही वापी के पूरे भर जाने का समय आवेगा।

जैसे उदाहरण—

एक तालाब में दो नल लगे हुए हैं। एक उस तालाब को ४ घण्टे

में भर सकता है। दूसरा उसको ५ घण्टे में भर सकता है। यदि वे दोनों एक साथ खोल दिये जाँय तो तालाब कितने समय में भर जायेगा।

न्यासः—∵ ४ घण्टे में पहिला नल = १ तालाब को भरता है

∴ १ ,, ,, ,, ,, = $\frac{१}{४}$ भागकोतालाबकेभरेगा

फिर ∵ ५ घण्टे में दूसरा नल = १ तालाब को भरता है

∴ १ ,, ,, ,, ,, = $\frac{१}{५}$ भागकोतालाबकेभरेगा

∴ १ घण्टे का दोनों का काम = $\frac{१}{४}+\frac{१}{५}$

∴ $\frac{१}{४}+\frac{१}{५}=\frac{५+४}{२०}$ $=\frac{९}{२०}$ भाग

फिरअनुपात ∵ $\frac{९}{२०}$ भाग तालाब का १ घण्टे में भरा जाता है,

∴ सम्पूर्ण भाग $=\frac{२०}{९}=२\frac{२}{९}$

∴ $२\frac{२}{९}$ घण्टे में दोनों नल सम्पूर्ण तालाब को भरेंगे। उत्तर।

नोट—नलिकाओं के प्रश्नों में एक एक घण्टे का दिनों में मान रहने पर एक एक दिन का मान निकाल कर प्रश्न निकालना चाहिये। यदि खाली करने वाला नल भी हो तो उस का भाग ऋण करके तब प्रश्न करना चाहिये।

उपरोक्त प्रश्न नवीन नियम के अनुसार।

४ घण्टे में पहला नल भरता है और ५ घण्टे में दूसरा

$\frac{४}{१}$ एवं $\frac{५}{१}$ इन दोनों के नीचे (कल्प्यो हरो रूपमहारराशेः) इस नियम से ४। ५ में क्रम से अंश हुए और १। १ क्रम से हर हुए।

T

इस लिये हरों को अंशों में भाग दिया तो क्रम से $\frac{१}{४}$, $\frac{१}{५}$ यह हुए।

इन लब्धियों को जोड़ा $=\frac{१}{४}+\frac{१}{५}=\frac{९}{२०}$ हुआ

फिर $\frac{९}{२०}$ का १ से भाग दिया तो $=१\div\frac{९}{२०}=\frac{२०}{९}=२\frac{२}{९}$ घण्टे

$=२\frac{२}{९}$ घण्टे में दोनों मिल कर भरेंगे।

यही उत्तर हुआ।

उदाहरणमाला (२७)

(१) एक हौज में तीन नल लगे हुए हैं। दो उस को भरने वाले हैं और एक खाली करने वाला है। भरने वाले क्रम से ४,५, घण्टे में भरते हैं, और खाली करने वाला ८ घण्टे में उसको खाली करता है। यदि तीनों नल एक साथ खोल दिये जावें तो हौज कितने समय में भर जावेगा।

(२) काशीराम ने अपने मकान में एक नल लगवाया, जो प्रति मिनट १।) पानी देता है। एक हौज जिसमें कि ५७६०० सेर पानी आता हो तो नल उसको कितने समय में भरेगा।

(३) क, ख, ग, नल एक हौज को ५, ८, १०, मिनट में भरते हैं यदि दो मिनट के पश्चात् ख नल बिगड़ जावे तो शेष हौज कितने समय में भरेगा।

(४) एक हौज एक नल को ४ घण्टे में भरता है, दूसरा ३ घण्टे में, तीसरा ६ घण्टे में भरता है और चौथा ४ घण्टे में खाली करता करता है। अगर चारों नल एक साथ खोल दिये जाँय तो हौज कितने समय में भर जावेगा।

शेषजाति उदाहरण

(प्र०) अपने धन का $\frac{१}{२}$ प्रयाग में, बाकी का $\frac{२}{९}$ काशी में दिया, शेष का $\frac{१}{४}$ मार्ग का किराया दिया, शेष का $\frac{६}{१०}$ गया में दान किया तो बाकी ६३ निष्क बचे। अब जो द्रव्य वह यात्री अपने घर से लेकर चला था उसका प्रमाण कहो।

न्यासः— $\frac{१}{२}, \frac{२}{९}, \frac{१}{४}, \frac{६}{१०}$ शेष ६३

१ इष्ट माना—इसका $\frac{१}{१} = \frac{१}{२}$ प्रयाग में दिया

$१ - \frac{१}{२} = \frac{१}{२}$ शेष, इसका $\frac{२}{९} = \frac{१}{२} \times \frac{२}{९} = \frac{१}{९}$ काशी में दिया

$\frac{१}{२} - \frac{१}{९} = \frac{९}{१८} - \frac{२}{१८} = \frac{७}{१८}$ इसका $\frac{१}{४} = \frac{७}{१८} \times \frac{१}{४} = \frac{७}{७२}$ मार्गव्ययदिया

$\frac{७}{१८} - \frac{७}{७२} = \frac{२८}{७२} - \frac{७}{७२} = \frac{२१}{७२}$ इसका $\frac{६}{१०} = \frac{२१}{७२} \times \frac{६}{१०} = \frac{७}{४०}$ गयामें दान

भागों को जोड़ा $\frac{१}{२} + \frac{१}{९} + \frac{७}{७२} + \frac{७}{४०}$

$$\frac{३६० + ८० + ७० + १२६}{७२०} = \frac{६३६}{७२०} \text{ इष्ट}$$

१ में से घटाया $१ - \frac{६३६}{७२०} = \frac{८४}{७२०}$

इष्ट १ से गुणित शेष ६३ = ६३ में से शेष $\frac{८४}{७२०}$ का भाग दिया

$$\frac{६३}{१} \div \frac{८४}{७२०} = \frac{६३}{१} \times \frac{७२०}{८४} = ५४० \text{ निष्क}$$

(२री रीति) भागापवाह से इस प्रकार प्रश्न निकलता है।

$$\frac{१}{२} \quad \frac{(१० - ६) \times १}{१० \times २} = \frac{४}{२०}.$$

$$\frac{२}{९} \quad \frac{४ \times (४ - १)}{२० \times ४} = \frac{१२}{८०}.$$

$$\frac{१}{४} \quad \frac{१२ \times (९ - २)}{८० \times ९} = \frac{८४}{७२०}.$$ भागों का जोड़, शेष क्रिया

$$\frac{६}{१०}$$ यथा ऊपर लिख चुके हैं।

इसलिये ५४० निष्क यह उत्तर हुआ।

नोट—शेषविधि के प्रश्नों को भागापवाह विधि के नियम से भी निकाल कर उपरोक्त नियमानुसार दिखलाया जा सकता है।

उदाहरणमाला (२८)

(१) एक भ्रमरों के झुण्ड से $\frac{१}{४}$ कदम्ब पर गया, $\frac{१}{३}$ शिलीन्ध्र पर गया, दोनों के अन्तर का ३गुना कुटज पर गया, बाकी १ भौंरा केतकी और मालती दोनों का परिमल एक ही समय में पाकर इधर उधर घूमता रहा तो भौंरों की संख्या कहो।

(२) एक मनुष्य अपनी सम्पत्तिका $\frac{१}{१२}$ दान देकर अपने पास केवल ७०००रु० को सामग्री बचा सकता है। बताओ, उसकी सम्पूर्ण सम्पत्ति कितने मूल्य की थी।

(३) एक थैली में से कुल धन का $\frac{३}{४}$ भाग एक जगह व्यय किया गया, फिर शेष का $\frac{१}{२}$ दूसरी जगह व्यय किया। इस प्रकार यदि थैली में ५००) रु० बचे हों तो थैली में कुल कितने रु० थे।

(४) यदि एक धन की संख्या में उसी का $\frac{१}{५}$ जोड़ दिया जावे तो योगफल १२०) हो जाता है। तो बताओ धनसंख्या क्या है?

(५) एक पति ने अपनी स्त्री को आभूषणार्थ मणि दिये। उनमें से उसने $\frac{१}{६}$ मस्तक पर धारण किये, शेष के $\frac{३}{५}$ गले में धारण किये, शेष के $\frac{१}{३}$ को बाहुओं में पहिरे, शेष के $\frac{३}{४}$ को कमर पर धारण किये, शेष १६ बचे जो वेणी में पहरे। कहो, कितने मणि थे ?

विविधउदाहरणमाला (२६)

(१) $९\frac{९१}{१००}\left(४\frac{३}{८} \text{ का } ६\frac{२}{७}+\frac{३}{७}\right)\times ४\frac{१}{८} \text{ का } \left(३\frac{१}{३}+\frac{१}{९}\right)$ को सरल करो।

(२) १९५ आदमी एक रेल के पुस्ते बनाने में जो कि २$\frac{१}{२}$ मील लम्बा है ११ घण्टा प्रति दिन काम करके १५ दिन लगाते हैं, तो १५० आदमी १५२० गज पुस्ते को १० घण्टा प्रति दिन काम करके कितने दिनों में पूरा करेंगे ?

(३) $\frac{१}{३}\left[४\frac{१}{३}\left\{४\frac{१}{४}\left(४+६\frac{१}{३}\right)\right\}\right]\div\frac{१}{१८}$ को सरल करो।

(४) रामनगर की आबादी तीन वर्ष पहले ४५६२५ थी यहाँ के जमींदार लाजपतराय ने ४१५ आदमी और बसा दिये। परन्तु एक मास के अन्दर ५० आदमी मर गये और ३० बच्चे पैदा हुए इस प्रकार ३ साल तक यह क्रम लगा रहा। बताओ अब उसकी आबादी क्या है।

(५) एक मनुष्य ने १) के १२ सेर गेहूँ लिए और १६ सेर के भाव बेंच दिये। फिर १) के १६ सेर लेकर १२ सेर बेंच दिये तो उसको क्या हानि और क्या लाभ हुआ ?

(६) अगर किसी हौज में ३० गज पानी भरा है और किसी नल से पानी आने के कारण उसमें ३२ गज पानी हो गया, यदि पहले उसमें १० गज की जञ्जीर पानी तक आजाती हो तो अब कितनी जञ्जीर आवेगी ?

T

(७) एक दिन श्याम को सूर्य छिपने के $\frac{१}{२}$ घण्टा बाद दिवसपति शर्मा ने अपनी घड़ी में १२ बजा दिये। दूसरे दिन प्रातः जब घड़ी ४ बजकर ८ मिनट हो गये थे तो दिवसपति शर्मा जी की घड़ी में ८ बजकर ४ मिनट हो हुआ था। तो पहले दिन सूर्य छिपने का समय ज्ञात करो।

(८) लालसिंह की १५ भैंसों की कीमत १०५०) है। उसने अपनी ५ भैंसे ६) प्रति भैंस के घाटे से बेंची और १० भैंस ५) प्रति भैंस के लाभ से बेंची तो बताओ उसे कितनी हानि या लाभ हुआ। कुल कितने रुपये में बेंची।

(९) यदि ११ मील पटरी की कीमत ५५०११) है, जब कि लोहे का भाव ८५) प्रति टन है, तो उस पटरी के $\frac{११}{२१}$ की लागत बताओ जब कि लोहे का भाव १३५) प्रति टन हो ?

(१०) क्विन्स कालेज से ७ लड़के एक साथ दौड़े, उनमें से प्रत्येक की क्रमशः चाल २, २, ३, ३, ४, ४, ५ मील प्रति घण्टा थी। यदि वे सब एक साथ ३$\frac{१}{२}$ मील की दौड़ दौड़े तो पहले आने वाले लड़के से बाद में आने वाला लड़का कितनी देर में आवेगा।

(११) देवकीरमण, लाजपतराय से ६० गज और मनोहर से ८०गज, ५०० गज की दौड़ में, आगे रहता है तो लाजपत राय शर्मा मनोहर से १ मील की दौड़ में कितना आगे रहेगा ?

(१२) रमेश एक खेत में देवेन्द्र को १०० पाइण्ट में ३५ पाइण्ट देता है और रमेश सुरेन्द्र को ५० में १० पाइण्ट देता है तो देवेन्द्र और सुरेन्द्र में कौन कितने पाइण्ट देगा ?

(१३) गौरीशङ्कर प्रति घण्टा ४$\frac{३}{८}$ मील की चाल से चल सकता है और राधेश्याम प्रति घण्टा ४ मील की चाल से चल सकता है दोनों

एक साथ ही एक दूसरे के विपरीत दौड़े तो बताओ $\frac{१}{२}$ घण्टे पश्चात् दोनों का क्या अन्तर होगा ?

(१४) लखनऊ में किसी जमींदार के पास १५०० आदमियों के लिए ७५ दिन की सामग्री है । जमींदार कान्फ्रेन्स में भाग लेने के लिए यदि २५ दिन बाद ५०० आदमी और आवें तो सामग्री कितने दिन पहले खर्च हो जायगी ?

(१५) एक आदमी ने अपने धन का $\frac{३}{५}$ बड़े लड़के को, $\frac{१}{६}$ छोटे को, $\frac{१}{१४}$ लड़की को, शेष १२७५) अपनी स्त्री को दिए। बताओ उसके पास कितना धन था ?

(१६) एक आदमी किसी जहाज के $\frac{३}{८}$ भाग का मालिक था। उसने अपने भाग का $\frac{३}{५}$ भाग ४५००) में बेंच दिया तो जहाज की कीमत बताओ ?

(१७) १५००) का ७ साल का व्याज बताओ जब कि ७५) का $\frac{१}{२}$ साल का ३॥) व्याज हो, तथा प्रति सैकड़ा भी बताओ ?

(१८) एक माली ने १७ सेर अमरूद, ऽ४॥ सेव, ऽ३॥ अङ्गूर, ७ दर्जन नारंगी, ७५ केले, ४॥-)॥। में खरीदे । अमरूद ≡) सेर, सेव ।≠) सेर, अङ्गूर ॥≠)॥ सेर, नारंगी ≋ दर्जन, केले ≠) के दो दर्जन के भाव से बेंचे तो उसे कितना लाभ या हानि हुई ।

(१९) भाज्य ५४५३२२७१४ है और भजनफल ८६१०६ ; तो भाजक बताओ ?

(२०) सरल करो—

$$\frac{६\frac{७}{८}+३\frac{४}{५}}{६\frac{७}{८}-३\frac{४}{५}} \div १०\frac{१७}{४१} \text{ का } \frac{१}{३}$$

इति गणितमुक्तावल्यां भिन्नत्रैराशिकसम्बन्धिगणितप्रकरणं समाप्तम् ।

T

"नान्तोऽस्ति गणिताम्बोधेर्यतोऽस्तः पृथुताभयात् ।
संक्षिप्तं बालमोदाय गणितं दर्शितं मया ॥"

इति मेरठमण्डलान्तर्गत-कण्डेरा-ग्रामनिवासिना प्रातःस्मरणीयपूज्यपाद-पं० श्रीबलदेवसहायशर्मपौत्रेण पण्डितश्रीबहोरीलालशर्मपुत्रेण ज्यौतिषाचार्य्येण श्रीपं० विशुद्धानन्दशर्मणा गौड़ेन विरचितः गणितमुक्तावली-द्वितीयो भागः समाप्तः ।

ग्रन्थकारपरिचयः

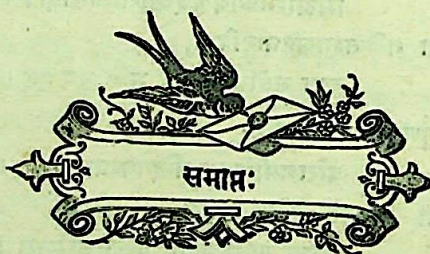
काश्यां स्वकीयगुणवर्धितचारुकीर्तै-
र्मिश्राभिधेयबलदेवगुरोः प्रसादात् ।
लब्धा मया गणितशास्त्रप्रधानविद्या,
हृद्या भवेद्धि विदुषां भुवि सद्य एव ॥ १ ॥

यस्याद्भुतैर्गुणगणैर्गणनाविहीनै-
र्वाराणसी विबुधवन्दितवन्द्यभावा ।
सा भारती विजयते सुचिरं प्रसन्ना,
सोऽयं गुरुर्विजयतां बलदेवमिश्रः ॥ २ ॥

पितामहो होमविधानविज्ञो,
वेदान्तदान्तोऽपि चिरं रसज्ञः ।
विशिष्टशिष्यैः प्रथितोरुकर्मा,
लेभे यशः श्रीबलदेवशर्मा ॥ ३ ॥

सुवासः 'कण्डेरा' लसति 'मयराष्ट्रे'ऽतिविदितः,
कुले धर्मज्ञानामजनि 'बलदेवो' ऽमरसमः ।
ततो जातास्तस्य प्रथितयशसः पञ्च तनयाः,
द्वितीयस्तन्मध्ये विमलगुणयुक्तो मम पिता ॥ ४ ॥

बहोरीलालपुत्रेण, तातपादोपजीविना ।
मया मुक्तावली प्रोता, विशुद्धानन्दशर्मणा ॥ ५ ॥

T

परीक्षोपयोगिपुस्तकानि

सिद्धान्त कौमुदी—मूल गुटका	।॥)
नागानन्द नाटक—सटीक	१।)
लीलावती—सोपपत्ति सूत्रार्थ प्रकाशिका सहित	१।)
विदुरनीति—अध्याय ३-८	।-)
अमरकोष—सम्पूर्ण सटिप्पण गुटका	।≈)
,, — ,, भाषा टीका	२।)
होडाचक्र—संवत, अयन, ऋतु, मास, पक्ष, तिथि, राशि, ग्रह, नक्षत्र का पञ्चाङ्गोपयोगी ज्ञान पं० श्रीसीतारामझा कृत	≈)॥
कुण्डमण्डपसिद्धि—विट्ठलदीक्षित कृत	।≈)
अभिज्ञानशाकुन्तल—'लक्ष्मी' टीका सहित	१॥)
ताजिकनीलकण्ठी—सोदाहरण सं० टी० भा० टी०	१॥≈)
गोलपरिभाषा—	≈)
जैमिनीयसूत्र— ,,	॥)
मेघदूत—मल्लिनाथीय टीका सहित	॥)
हर्षचरित—प्रथम उच्छ्वास सटीक	।॥)
उत्कीर्णलेखाञ्जलि—९ शिलालेख	।≈)

परिवर्तित नियमावली के सम्पूर्ण ग्रन्थों का एकमात्र

प्राप्तिस्थान—

मास्टर खेलाड़ीलाल ऐण्ड सन्स,

संस्कृत बुकडिपो,

कचौड़ीगली, बनारस सिटी।

शाखा—सुलतानपुर, बांकीपुर, पटना।

T